凸包モデルの生産可能集合の解釈と一般化

日大生産工（院）　○ 吉村　彩
日大生産工　　　　大澤　慶吉
日大生産工　　　　篠原　正明

1.　はじめに

CCR モデル、BCC モデル、ならびに一般的な凸包モデルにおける効率性測定は、それらの生産可能集合(PPS ; Production Possibility Set)の定義域に依存しており、いずれの定義域も既存活動データ集合(X,Y)の凸包に関連しているので、CCR モデル、BCC モデル、ならびに一般的な凸包モデルの PPS に対して、統一的な考察を試みる。

PPS は読んで字の如く、データ集合(X,Y)を持つ既存活動の集合から類推できる生産可能な入力 x と出力 y の対の集合である。すなわち、(X,Y)より PPS を類推し、注目活動(x_0, y_0)の PPS の境界からの乖離度合として、(x_0, y_0)の効率性測定を行なうのが、PPS に基づく包絡分析のアプローチである。従って、CCR モデル、BCC モデル、ならびに一般的な凸包モデルの PPS を統一的に解釈することによって、BCC モデル、CCR モデル、ならびに一般的な凸包モデルにおける効率性測定に対して幾何学的考察を深め、かつ各モデル間の関係を理論的に分析できる。

2.　基本 BCC モデルの PPS

基本 BCC モデルの PPS(x,y)は以下の(1)～(4)で与えられる。

$$x \geq X\lambda \quad \cdots(1)$$
$$\mathrm{y} \leq \mathrm{Y}\lambda \quad \cdots(2)$$
$$\lambda \geq 0 \quad \cdots(3)$$
$$e\lambda = 1 \quad \cdots(4)$$

活動 $j\left(j = 1, \cdots n\right)$ の入力データベクトルを x_j、出力データベクトルを y_j とすると、

$$X = \left(x_1, \cdots x_j, \cdots, x_n\right), Y = \left(y_1, \cdots, y_j, \cdots, y_n\right)$$

である。

(1)の右辺は、$X\lambda = \sum \lambda_j x_j$、(2)の右辺は、$Y\lambda = \sum \lambda_j y_j$ となるが、(3)と(4)より、$X\lambda$ と $Y\lambda$ は $\{x_j\}$、$\{y_j\}$の λ による凸結合である。

従って、1 入力 1 出力の場合には、横軸に入力$\{x_j\}$、縦軸に出力$\{y_j\}$をプロットすると、$X\lambda$ と $Y\lambda$ は 2 次元平面において既存活動のデータ集合(X,Y)の凸包となる。

Interpretation of Production Possibility Set for Convex Hull DEA Model and its Generalization

Aya YOSIMURA, Keikichi OSAWA and Masaaki SHINOHARA

データ集合(X,Y)の凸包の任意の点を(α,β)とするならば、$x \geq \alpha, y \leq \beta$ ($(\alpha,\beta) \in (X,Y)$の凸包)の領域は、(α,β)の右下四半平面であり、従って、(1)と(2)の意味するところは、PPS(x,y)は凸包に属する任意点の右下四半平面の凸包内全点についての和集合となる。

3. $e\lambda = p$とした変形BCCモデルのPPS

基本BCCモデルの(4)において、$e\lambda = 1$の代わりに$e\lambda = p\,(>0)$とした変形 BCC モデルを考える。　$e\lambda = p \quad \cdots(5)$

(5)式の両辺をpで割ると、(6)式となる。

$$e\left(\frac{\lambda}{p}\right) = 1 \quad \cdots(6)$$

ここで、$s = \lambda / p$と置換し、これを(1),(2)に代入すると、次式(7)～(10)を得る。

$$x \geq pXs \quad \cdots(7)$$
$$y \leq pYs \quad \cdots(8)$$
$$s \geq 0 \quad \cdots(9)$$
$$es = 1 \quad \cdots(10)$$

すなわち、$e\lambda = p$とした変形 BCC モデルは、既存活動のデータ集合(X,Y)を一律にp倍した基本モデルである。

4. 凸包モデルのPPSの解釈

一般的な凸包モデルは、基本BCCモデルの(4)を$e\lambda = p$とし、pに上下限制約$L \leq p \leq U$を課している。

すなわち、凸包モデルのPPSは一般に、(11)～(14)で与えられるが、

$$x \geq X\lambda \quad \cdots(11)$$
$$y \leq Y\lambda \quad \cdots(12)$$
$$\lambda \geq 0 \quad \cdots(13)$$
$$L \leq e\lambda \leq U \quad \cdots(14)$$

(14)で$e\lambda = p > 0$と置き、$s = \lambda / p$と置換すると、(15)～(19)となる。

$$x \geq pXs \quad \cdots(15)$$
$$y \leq pYs \quad \cdots(16)$$
$$s \geq 0 \quad \cdots(17)$$
$$es = 1 \quad \cdots(18)$$
$$L \leq p \leq U \quad \cdots(19)$$

ここで、(15)～(18)はsをλと読み替えれば、pXとpYをデータ集合として持つ基本BCCモデルであるが、(19)式により、データ集合のとりうる範囲が規定されている。

[例4.1]　L=0、U=1のDRS(規模の収穫減少型)モデル　$0 \leq p \leq 1$の範囲のデータ集合(pX, pY)の凸包の各点の右下四半平面の和集合がPPSとなる。原データ集合(X,Y)の各点から原点を結ぶ線分の集合をデータ集合として持つ基本BCCモデルを想定する。

[例4.2]　L=1、U=∞のIRS(規模の収穫増加型)モデル　原点から原データ集合(X,Y)の各点を通る直線の各点から原点を含まない方向の半直線の集合をデータ集合として持つ基本BCCモデルを想定すればよい。

[例4.3]　L=0.8、U=1.3のGRSモデル

$0.8 \leq p \leq 1.3$の範囲のデータ集合(pX, pY)の凸包の各点の右下四半平面の和集合がPPSとなる。原点から原データ集合(X,Y)の各点を通る直線において、原データ集合の各点を基準に、原点方向に20%の点から原点と反対方向に30%の点の間の線分の集合をデータ集合として持つ基本BCCモデルを想定すればよい。

5. DRSモデルとIRSモデルに関する考察

DRSモデルならびにIRSモデルのPPSに関する幾何学的説明図（例えば文献[１]の第4章）ならびに4章の考察にもとづき、「DRSモデルのPPSは、原データ集合(X,Y)に原点

(0,0)活動を追加した基本BCCモデルのPPS」、「IRSモデルのPPSは、原データ集合(X,Y)に無限遠点(∞,∞)活動を追加した基本BCCモデルのPPS」との解釈が予想可能であるが、これを以下に厳密に証明する。

[定理5.1]

既存活動のデータ集合(X,Y)にn+1番目の活動(0,0)を追加した新データ集合(X',Y')に対する基本BCCモデルのPPSはDRSモデルのPPSに一致する。

(証明)（X',Y'）に対する基本BCCモデルのPPS(x,y)は、(20)～(23)で与えられる。

$$x \geq X'\lambda' = \sum x_i\lambda_i + 0\lambda_{n+1} \quad \cdots(20)$$

$$y \leq Y'\lambda' = \sum y_i\lambda_i + 0\lambda_{n+1} \quad \cdots(21)$$

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n + \lambda_{n+1} = 1 \quad \cdots(22)$$

$$\lambda_i \geq 0 \quad (i = 1, \cdots, n+1) \quad \cdots(23)$$

(20)と(21)の右辺を(24)、(25)と変形する。

$$\sum x_i\lambda_i + 0\lambda_{n+1} = \sum(x_i + 0)\lambda_i = \sum x_i\lambda_i \quad \cdots(24)$$

$$\sum y_i\lambda_i + 0\lambda_{n+1} = \sum(y_i + 0)\lambda_i = \sum y_i\lambda_i \quad \cdots(25)$$

従って、(20)～(23)は以下となる。

$$x \geq X\lambda \quad \cdots(26)$$

$$y \leq Y\lambda \quad \cdots(27)$$

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n \leq 1 \quad \cdots(28)$$

$$\lambda_i \geq 0 \quad (i = 1, \cdots, n) \cdots(29)$$

証明終

[定理5.2]

既存活動のデータ集合(X,Y)にn+1番目の活動(∞,∞)を追加した新データ集合(X',Y')に対する基本BCCモデルのPPSはIRSモデルのPPSに一致する。

(証明)（X',Y'）に対する基本BCCモデルのPPS(x,y)は、(30)～(33)で与えられる。

$$x \geq X'\lambda' = \sum x_i\lambda_i + \left(\sum kx_i\right)\lambda_{n+1} \quad \cdots(30)$$

$$y \leq Y'\lambda' = \sum y_i\lambda_i + \left(\sum ky_i\right)\lambda_{n+1} \quad \cdots(31)$$

$$e\lambda' = 1 \quad \cdots(32)$$

$$\lambda' \geq 0 \quad \cdots(33)$$

ただし、(30)と(31)において$k \to \infty$を想定することにより、無限遠点相当のn+1番目の活動を考慮する。(30)と(31)の右辺は、(34)、(35)と変形できる。

$$\sum x_i\lambda_i + \left(\sum kx_i\right)\lambda_{n+1} = \sum x_i\left(\lambda_i + k\lambda_{n+1}\right) \quad \cdots(34)$$

$$\sum y_i\lambda_i + \left(\sum ky_i\right)\lambda_{n+1} = \sum y_i\left(\lambda_i + k\lambda_{n+1}\right) \quad \cdots(35)$$

$t_i = \lambda_i + k\lambda_{n+1}$と置き、(32)、(33)かつ$k \to \infty$を考慮すると、(36)～(39)となる。

$$x \geq Xt \quad \cdots(36)$$

$$y \leq Yt \quad \cdots(37)$$

$$et \geq 1 \quad \cdots(38)$$

$$t \geq 0 \quad \cdots(39)$$

証明終

[定理5.3]

既存活動のデータ集合(X,Y)にn+1番目の活動として(0,0)を、n+2番目の活動として無限遠点(∞,∞)を追加した新データ集合(X',Y')に対する基本BCCモデルのPPSはCCRモデルのPPSに一致する。

(証明)定理5.1と定理5.2の継続適用。証明終

さらに一般的な上下限制約付GRSモデルのPPSは、n個の既存活動のデータ集合(X,Y)に、一律にL倍縮約(≤1)した新たなn個の縮約活動のデータ集合(LX, LY)と一律にU倍拡大(≥1)したさらに新たなn個の拡大活動のデータ集合(UX, UY)の、総計で、３n個の活動に対するデータ集合｛(LX, LY),(X,Y),(UX, UY)｝に対する基本BCCモデルのPPSとなる（L≤1かつU≥1では、既存活動のデータ集合(X,Y)を除いた２n個の活動に対するデータ集合、とも言える）。

6. 凸包モデルのPPSモデルの一般化

4章で示したように、基本凸包モデルのPPSは、「データ集合$(pX, pY; L \le p \le U)$に対する基本BCCモデルのPPS」と解釈することができる。この解釈に基づき、凸包モデルのPPSの一般化を試みる。

6.1 pが一次元直線の部分集合Sに属する場合、$(p \in S \subseteq R)$

Sが凸な場合が上下限制約$L \le p \le U$に相当する。一般的には、Sが複数の上下限制約の和集合から構成される場合へと一般化できる。ただし$L = \min\{L_i\}, U = \max\{U_i\}$とした基本凸包モデルに帰着される。

6.2 離散伸縮率pの場合$(p \in \{p_1, p_2, \cdots, p_N\})$

例えば、$p \in \{p_1, p_2\}$の場合は、データ集合として(p_1X, p_2Y)と(p_2X, p_2Y)を考慮する。但し、離散伸縮率モデルのPPSは、$L = \min\{p_1, \cdots, p_N\}$ $U = \max\{p_1, \cdots, p_N\}$とした基本凸包モデルのPPSに一致する。

6.3 入力データ伸縮率pと出力データ伸縮率qの場合

基本凸包モデルに対応して、以下のPPSが構成できる。

$$x \ge pX\lambda \qquad \cdots(40)$$

$$y \le qY\lambda \qquad \cdots(41)$$

$$\lambda \ge 0 \qquad \cdots(42)$$

$$e\lambda = 1 \qquad \cdots(43)$$

$$L_X \le p \le U_X \qquad \cdots(44)$$

$$L_Y \le q \le U_Y \qquad \cdots(45)$$

6.4 $L_X = U_X = p$と$L_Y = U_Y = q$の場合

入力データと出力データの伸縮率の上下限が各々等しい場合は、各々の伸縮率が正定数pとqで与えられる。

$p = q$の場合が$e\lambda = p$とした変形BCCモデルとなる。$p \ne q$の場合には、入力データについては一律に伸長し(p>1)、出力データについては一律に縮小する(q<1)ような変形操作も可能となる。

6.5 活動毎に共通伸縮率$p(i)$が与えられる場合

基本凸包モデルに対して、以下のPPSが構成できる。

$$x \ge \sum p(i) x_i \lambda_i$$

$$y \le \sum p(i) y_i \lambda_i$$

$$\lambda \ge 0$$

$$e\lambda = 1$$

$$L(i) \le p(i) \le U(i) \quad (i = 1, \cdots, n)$$

ただし、$p(i)$は活動iの入出力データに共通の伸縮率である。

6.6 $L(i) = U(i) = p(i)$の場合

活動毎に入出力データを伸長したり、縮小することができる。 例えば、$p(i) = 1$ for $i \in CRS$, $p(i) = 0.9$ for $i \in DRS$, $p(i) = 1.2$ for $i \in IRS$,等々。

7．おわりに

$e\lambda = p$(伸縮率)とした変形BCCモデルを通して、CCRモデル、BCCモデル、ならびに一般的な凸包モデルのPPSに対して、統一的考察を行った。さらに、6章では伸縮率pを入出力/活動ごとに区別することにより一般化を試みた。凸包モデルのPPSについての統一的考察結果ならびに一般化伸縮率DEAモデルの離散評点DEA、具体的な生産効率性評価などへの適用は今後の課題とする。また、効率性評価が線形計画法で定式化できない一般化伸縮率DEAモデルに対する求解アルゴリズムも今後の課題である。

参考文献

[1]刀根　薫:経営効率性の測定と改善～包絡分析法DEAによる～、日科技連、1993年。