

近似固有値にもとづく CI 値と要素誤差平均にもとづく CI 値の等価性

日大生産工（院） ○ 槍崎 将之
日大生産工 大澤 慶吉
日大生産工 篠原 正明

1. はじめに

AHP における完全一対比較行列の論理的整合性の尺度として Saaty 整合度 CI が存在する。固有ベクトル法による優先ウェイトベクトル推定を前提として、主固有値を用いて CI 値を定義する。しかしながら、固有ベクトル法以外の推定法（例えば、幾何平均法、算術平均法、等々）を採用した場合には、固有値に基づく CI 定義式は使用できない。そこで、近似的に固有値を計算し、その固有値に基づき CI 定義式を適用するアプローチが存在する（「近似固有値に基づく CI 値」）。

主固有値に基づく Saaty 整合度 CI の妥当性を与える 1 つの根拠として、それが測定行列 A と推定行列 X の対角を除く要素毎の倍率誤差の平均値から 1 を引いた値（「要素誤差平均に基づく CI 値」）に等しくなるという数学的事実が存在する。本論文では、主固有ベクトル法以外の推定法においても、「近似固有値に基づく CI 値」と「要素誤差平均に基づく CI 値」が等しくなることを証明する。これにより、近似固有値に基づく CI 値は固有ベクトル法に対する Saaty 整合度 CI を、固有ベクトル法以外の推定法に一般化した CI 値定義式であると言える。

2. 「近似固有値に基づく CI 値」と「要素誤差平均に基づく CI 値」

$n \times n$ 一対比較行列 $A = \{a_{ij}\}$ に対し、任意の推定ウェイトベクトルを $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ とする。ここで、「推定ウェイトベクトル」としたが、単に「ベクトル」としても以下の議論は同じである。 x_i / x_j を (i, j) 要素とする行列 $X = \{x_{ij}\}$ を x_{ij} が測定値 a_{ij} に対応した推定値を示すので、一対比較推定行列と呼ぶ。測定行列 $A = \{a_{ij}\}$ と推定行列 $X = \{x_{ij}\}$ の要素毎の比倍率誤差である e_{ij} は(1)式で表される。

$$\begin{aligned} e_{ij} &= \frac{a_{ij}}{x_{ij}} \\ &= \frac{a_{ij} x_j}{x_i} \end{aligned} \quad (1)$$

e_{ij} は一対比較 (i, j) についての測定値 a_{ij} の x_{ij} に対する乗法的な誤差を表現しており、 $e_{ij} = 1$ が「誤差なし」を意味する。

ベクトル x が A の右固有値ならば、「 $Ax = \lambda x$ 」が成立するが、ここでは、ベクトル x は固有ベクトルに限定されない任意のベクトルを想定する。従って、一般的には「 $Ax \neq \lambda x$ 」である。 $Ax = \lambda x$ は式毎には次式となる。

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \lambda x_i \quad (i=1, \dots, n) \quad (2)$$

しかし、ここでは x は固有ベクトルに限定されない任意のベクトルを想定しているので、一般的には(2)式は成立しない。そこで、 $i = 1$,

Equivalence between CI values

defined by the row-wise eigenvalue and the element-wise error mean

Masayuki UTSUGIZAKI, Keikichi OSAWA and Masaaki SHINOHARA

...,n の n 本の式毎に λ を定めれば、(2)式のか
わりに次式(3)は成立する。

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \lambda_i x_i \quad (i=1, \dots, n) \quad (3)$$

そこで、近似固有値 λ_{ave} を n 個の λ_i ($i=1, \dots, n$) の算術平均値として(4)式で定義する。

$$\lambda_{ave} = \frac{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right)}{n} \quad (4)$$

この近似固有値を用いて CI 値を固有ベクトル法の時と同様に、以下の(5)式で定義する。

$$CI_{eigen} = \frac{\lambda_{ave} - n}{n-1} \quad (5)$$

また、「要素誤差平均に基づく CI 値」 CI_{error} は、対角要素を除く e_{ij} の算術平均値から 1 を引いた値として、以下の(6)式で定義する。

$$CI_{error} = \left(\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} e_{ij} \right) - 1 \quad (6)$$

ここで、1 を引くのは前にも述べたように、要素毎倍率誤差 e_{ij} は「誤差なし」で $e_{ij} = 1$ だからである。「1.はじめに」に述べたように、固有ベクトル法の下では、「 $CI_{eigen} = CI_{error}$ 」が証明されているが、次章に示すように、固有ベクトル法以外の任意の推定ウェイトベクトルについても、「 $CI_{eigen} = CI_{error}$ 」が成立する。

3 . 任意ベクトルに対する「 $CI_{eigen} = CI_{error}$ 」の定理

定理 1

対角要素 $a_{ii} = 1$ を持つ $n \times n$ 対比較行列 $A = \{ a_{ij} \}$ において、任意のウェイトベクトル x に対して、「 $CI_{eigen} = CI_{error}$ 」が成立する。但し、 CI_{eigen} は(5)、 CI_{error} は(6)式で定義する。

〔証明〕 CI_{eigen} の定義式(5)に(4)式を代入する。

$$CI_{eigen} = \frac{1}{n(n-1)} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) - \frac{n}{n-1} \quad (7)$$

また、(3)式に(1)式を代入すると(8)式を得る。

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^n e_{ij} \quad (8)$$

(8)式を(7)式右辺に代入し、総和を $i = j$ と $i \neq j$ に分けると次式を得る。

$$\begin{aligned} CI_{eigen} &= \frac{1}{n(n-1)} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n e_{ij} \right) - \frac{n}{n-1} \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \left(\sum_{i \neq j} e_{ij} + n \right) - \frac{n}{n-1} \\ &= \left(\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} e_{ij} \right) - 1 \\ &= CI_{error} \end{aligned} \quad (9)$$

(Q.E.D.)

定理 1 において行列 A について対角要素 $a_{ij} = 1$ を仮定したが、逆比性 $a_{ij} \times a_{ji} = 1$ は仮定していない。対角要素 $a_{ij} = 1$ を仮定しない一般的な行列 A について、次の定理 2 が成立する。

定理 2

任意の $n \times n$ 正方向行列 $A = \{ a_{ij} \}$ において、任意ベクトル x に対し、要素毎の倍率誤差 e_{ij} の平均 $\bar{e}$ を(10)式で定義すると、 $\bar{e}$ と(4)式の近似固有値 λ_{ave} 間に(12)式の関係が成立する。

$$\bar{e} = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j} e_{ij} \quad (10)$$

$$e_{ij} = \frac{a_{ij} x_j}{x_i} \quad (11)$$

$$\bar{e} = \frac{\lambda_{ave}}{n} \quad (12)$$

〔証明〕 λ_{ave} の定義式(4)に λ_i を代入し、(11)式の e_{ij} を用いて整理する。

$$\begin{aligned} \lambda_{ave} &= \frac{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right)}{n} \\ &= \frac{1}{n} \left\{ \sum_i \sum_j \left(a_{ij} \cdot \frac{x_j}{x_i} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_i \sum_j e_{ij} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

$\bar{e}$ の定義式(10)を代入すれば、(12)式を得る。
(Q.E.D.)

近似固有値 (行毎固有値というべきか?) は x が固有ベクトルの時に固有値となるので、定理 2 は固有値の持つ性質として、「要素誤差を n 倍した値」を主張する。以下に簡単な例により、この定理 2(と定理 1)の主張を説明する。

〔例 1〕

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ とする。}$$

x は A の主固有値 $\lambda_{\max} = 3$ に対応する主固有ベクトルである。 x に基づき A を推定した $X = \{ x_{ij} \} (x_{ij} = x_i / x_j)$ と誤差行列 $E = \{ e_{ij} \}$ は次式で与えられる。

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_{\text{ave}} = 3, \bar{e} = 1.5, n = 2$ なので、定理 2 の「 $\bar{ne} = \lambda_{\text{ave}}$ 」が成立している。例 1 では A の対角要素がすべて 1 なので、 $CI_{\text{eigen}} = (3 - 2) / (2 - 1) = 1, CI_{\text{error}} = 2 - 1 = 1$ となり、定理 1 の「 $CI_{\text{eigen}} = CI_{\text{error}}$ 」も成立している。

〔例 2〕

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ とする。}$$

x は固有ベクトルではないが、 X と E は次式で与えられる。

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2, \lambda_{\text{ave}} = 3.5, \bar{e} = 1.75, n = 2$ なので、定理 2 の「 $\bar{ne} = \lambda_{\text{ave}}$ 」が成立している。

同様に、 $CI_{\text{eigen}} = (3.5 - 2) / (2 - 1) = 1.5, CI_{\text{error}}$

$= 2.5 - 1 = 1.5$ となり、定理 1 の「 $CI_{\text{eigen}} = CI_{\text{error}}$ 」も成立している。

〔例 3〕逆比性が成立しない例を示す。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ とする。}$$

x は A の主固有値 $\lambda_{\max} = 3$ に対応する主固有ベクトルである。 X と E は次式で与えられる。

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_{\text{ave}} = 3, \bar{e} = 1.5, n = 2$ なので、定理 2 の「 $\bar{ne} = \lambda_{\text{ave}}$ 」が成立している。また、 $CI_{\text{eigen}} = (3 - 2) / (2 - 1) = 1, CI_{\text{error}} = 2 - 1 = 1$ となり、逆比性が成立していなくても定理 1 も成立している。

$$〔例 4〕 A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ とする。}$$

x は固有ベクトルではないが、 X と E は次式で与えられる。

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (21)$$

$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5, \lambda_{\text{ave}} = 3.5, \bar{e} = 1.75, n = 2$ なので、定理 2 の「 $\bar{ne} = \lambda_{\text{ave}}$ 」が成立している。同様に、 $CI_{\text{eigen}} = (3.5 - 2) / (2 - 1) = 1.5, CI_{\text{error}} = 2.5 - 1 = 1.5$ となり、定理 1 の「 $CI_{\text{eigen}} = CI_{\text{error}}$ 」も成立している。

〔例 5〕

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{17}}{4} \end{pmatrix} \text{ とする。}$$

x は A の主固有値 $\lambda_{\max} = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$ に対応する主固

有ベクトルである。XとEは次式で与えられる。

$$X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{1+\sqrt{17}} \\ \frac{1+\sqrt{17}}{4} & 1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1+\sqrt{17}}{2} \\ \frac{8}{1+\sqrt{17}} & 1 \end{pmatrix} \quad (23)$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_{ave} = \lambda_{max}$ 、 $\bar{e} = \frac{3+\sqrt{17}}{4}$ 、 $n = 2$ なので、定理2の「 $\bar{ne} = \lambda_{ave}$ 」が成立している。また、 $CI_{eigen} = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ 、 $CI_{error} = \frac{\sqrt{17}}{2} - 1$ となり、Aの対角要素がすべて1でないので当然の事として定理1は成立しない。

〔例6〕

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{とする。}$$

XとEは次式で与えられる。

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (24)$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad (25)$$

$\lambda_1 = 3$ 、 $\lambda_2 = 4$ 、 $\lambda_{ave} = 3.5$ 、 $\bar{e} = 1.75$ 、 $n = 2$ となり、定理2の「 $\bar{ne} = \lambda_{ave}$ 」が成立している。 $CI_{eigen} = 3.5 - 2 = 1.5$ 、 $CI_{error} = 2 - 1 = 1$ となり、Aの対角要素がすべて1でないので当然の事として定理1は成立しない。

4. おわりに

固有ベクトル法以外のウェイトベクトル推定法を採用した際に、行毎の近似固有値の算術平均値を用いたCI値の定義式が、CI値が本来満足すべき要素毎の倍率誤差の算術平均に基づくCI値と等価であることを逆比性を仮定せずに証明した(定理1)。さらに、この等価関係を一般化して、任意の正方行列と任意のベクトルが持つ性質として証明した(定理2)。さらに、定理1と定理2を例題により説明した。

不完全一対比較情報下における整合性の議論に、本研究成果を拡張することなどが、今後の課題である。

付録

理論シミュレーション実験においても、「近似固有値に基づくCI値」と「要素誤差平均に基づくCI値」が等しくなる結果が得られるが、それを以下に示す。

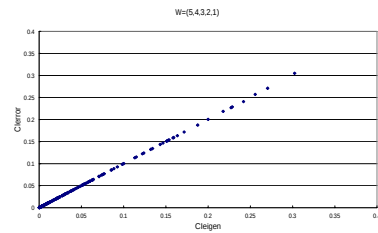


図 1. 固有ベクトル法

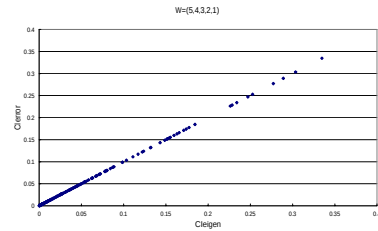


図 2. 算術平均法

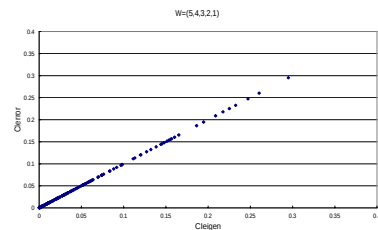


図 3. 幾何平均法

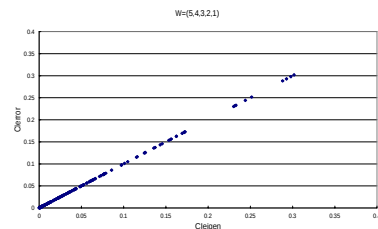


図 4. 調和平均法