

# 変動パラメータを変化させた時の最適な一般化平均法 ～シミュレーション実験～

日大生産工（院） 槍崎 将之  
日大生産工 篠原 正明

## 1. はじめに

AHP(Analytic Hierarchy Process)におけるウェイト推定法として、様々な手法が存在する。例えば、固有ベクトル法、算術平均法などである。

前研究〔1〕から「理論シミュレーション実験において、誤差度合を小、中、大と変化させていくと最適な一般化平均法は、幾何平均型から算術平均型へと移行する」ことが判明している。

この判明結果をより現実的な知見『整合度 CI 小時には固有ベクトル法あるいは幾何平均法を、CI 大時には算術平均法がより真値に近いウェイトを与える』として世に提案する為には、以下の課題、を理論シミュレーション実験を通して検証する必要がある。

誤差度合と整合度に相関性が存在する。

通常は整合度といえば、固有ベクトル法に対する Saaty 整合度を言うが、それ以外の推定法に基づく整合度でも、整合度間で相関性がある。

追試の意味、標本サイズ、誤差度合の定義を含め、前実験〔1〕の再確認を行う。

そこで本論では、の課題を検証する。算術平均法、幾何平均法、調和平均法を含む「平均法」の一般化として「一般化平均法」を考

え、理論シミュレーション実験により、変動パラメータを変化させた時の最適な一般化平均法を考察する。

## 2. 理論シミュレーション実験

真値ウェイトベクトル $w^0$ を与え、 $n \times n$ 対比較行列 $W^0$ を作成する。すなわち、項目 $i$ の真値を $w^0_i$ とするならば、真値に基づく一対比較行列 $W^0 = \{w^0_{ij}\}$ の $(i, j)$ 要素は、 $w^0_{ij} = w^0_i / w^0_j$ となる。

さらに、一対比較行列 $W^0$ に乘法型誤差 $e$ を与え測定一対比較行列 $W^A$ を生成する。そして、測定一対比較行列に対して測定ウェイトベクトル $w^A$ を算出する。つまり、 $(i, j)$ 要素に対する乘法型誤差を $e_{ij}$ とすれば、 $w^A_{ij} = w^0_{ij} \cdot e_{ij} = (w^0_i / w^0_j) \cdot e_{ij}$ が測定値となる。測定一対比較行列は $W^A = \{w^A_{ij}\}$ である。ここで、 $e_{ij}$ は平均 1 を持つ確率分布に従う確率変数 $E_{ij}$ の実現値である。確率変数 $E$ としては、 $[1 - , 1 + ]$ の一様分布に従うと仮定する。以降、を変動パラメータと呼ぶ。

次に、 $n$ 個のデータに対しパラメータ $(p)$ を導入し、第 $i$ 行に対する $p$ 次一般化平均 $w_i(p)$ は(1)式で表される。

$$w_i(p) = \left\{ \frac{\sum_j (w^A_{ij})^p}{n} \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (1)$$

---

Optimum Generalized Mean for AHP Weight Estimation  
when varying Deviation Parameter  
Masayuki UTSUGIZAKI and Masaaki SHINOHARA

この際 $w_i(p)$ の合計が1となるように正規化を行う。

そして、真値と一般化平均法での推定値との近接度合を、絶対距離で評価する。計算式は次式となる。

$$M_{(0,A)} = \sum_{i=1}^n |w^0_{(i)} - w^A_{(i)}| \quad (2)$$

$w^0_{(i)}$ は真値の第 $i$ 要素、 $w^A_{(i)}$ は推定値の第 $i$ 要素である。

### 3. 結果

真値については、 $N=5$  の条件の下で、 $(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5) = (5, 4, 3, 2, 1)$  と降順で与える場合と、 $(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5) = (1, 1, 1, 1, 1)$  と全てに等しい場合の2つのケースを想定した。

また、1つの変動パラメータ ( $\alpha = 0.1, 0.2, \dots, 0.8, 0.9$ ) に対して100回ずつのシミュレーションを行う。

グラフは縦軸に絶対距離、横軸にはパラメータ( $p$ )を示すものである。

図1、図2は  $\alpha = 0.1$ 、 $w = (5, 4, 3, 2, 1)$  の条件において標本数を変えたグラフである。

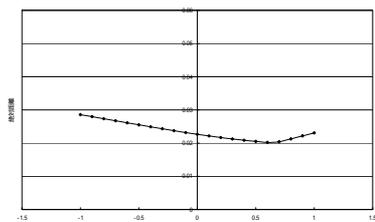


図1. 標本数1 ( $\alpha = 0.1$ , 降順)

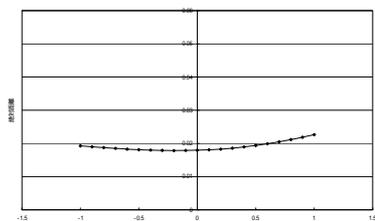


図2. 標本数100 ( $\alpha = 0.1$ , 降順)

続いて、真値をすべてに等しい場合とした時の結果を図3、図4に示す。

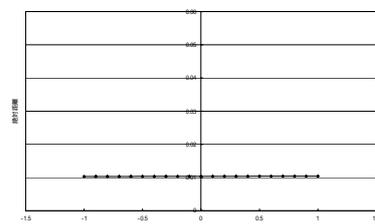


図3. 標本数1 ( $\alpha = 0.1$ , 全等)

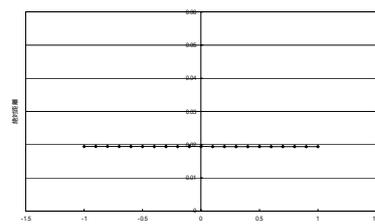


図4. 標本数100 ( $\alpha = 0.1$ , 全等)

次に、変動パラメータ  $\alpha$  を0.1から0.9まで0.1ずつ上げていくことにより、その時最小となるパラメータ( $p$ )、および絶対距離がどのように変化していくかを検証する。

変動パラメータ  $\alpha = 0.3, 0.6, 0.9$  の3段階において、真値を降順で与える場合を図5~図7に、等しくする場合を図8~図10に示す。ともに標本数は100とする。

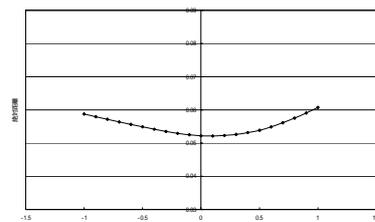


図5. 変動パラメータ=0.3 (降順)

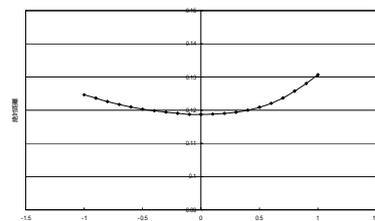


図6. 変動パラメータ=0.6 (降順)

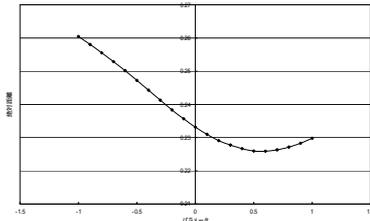


図 7. 変動パラメータ=0.9 (降順)

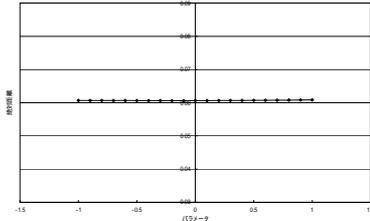


図 8. 変動パラメータ=0.3 (全等)

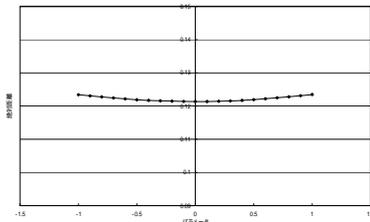


図 9. 変動パラメータ=0.6 (全等)

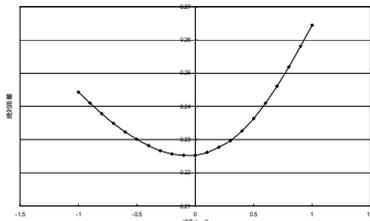


図 10. 変動パラメータ=0.9 (全等)

変動パラメータを変化させていくことで得られる真値との近接度合（絶対距離）が最小となるパラメータ(p)の動向を調べる。これにより、各変動パラメータ時での最適な一般化平均法が判明する。

真値が降順、および、すべてに等しい場合において各パラメータでの最小近接頻度数を表 1、表 2 に示す。図 11、図 12 にはパラメータ間を 3 段階：A (p=1.0, 0.9, 0.8, 0.7, 0.6, 0.5, 0.4)、B (p=0.3, 0.2, 0.1, 0, -0.1, -0.2, -0.3)、C (p=-0.4, -0.5, -0.6, -0.7, -0.8, -0.9, -1.0)に区切り、その区間での最小近接

頻度数の和を求めグラフ化したものである。

表 1. 各パラメータでの最小近接頻度 (降順)

	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	合計	確率
-1	25	24	22	25	25	28	31	20	25	225	25.00%
-0.9	4	2	1	2	1	1	0	2	1	14	1.56%
-0.8	1	0	3	1	2	5	1	4	1	18	2.00%
-0.7	2	1	3	8	0	4	3	5	4	30	3.33%
-0.6	2	5	1	0	4	1	2	0	0	15	1.67%
-0.5	7	2	0	4	0	2	0	1	0	16	1.78%
-0.4	2	4	3	5	4	2	3	1	1	25	2.78%
-0.3	5	5	6	0	4	2	2	1	1	26	2.89%
-0.2	7	5	7	5	0	2	2	2	3	33	3.67%
-0.1	3	2	2	0	4	6	1	3	2	23	2.56%
0	5	4	5	3	6	0	3	2	2	30	3.33%
0.1	2	5	5	4	5	0	4	0	1	26	2.89%
0.2	4	7	0	0	5	2	3	4	2	27	3.00%
0.3	5	3	5	5	2	2	2	2	3	29	3.22%
0.4	1	4	1	1	2	3	3	2	3	20	2.22%
0.5	1	2	5	6	6	4	3	4	5	36	4.00%
0.6	4	3	3	4	3	2	1	3	4	27	3.00%
0.7	2	6	3	4	4	6	3	5	3	36	4.00%
0.8	1	3	2	4	2	3	1	5	3	24	2.67%
0.9	3	3	2	4	4	4	4	1	2	27	3.00%
1	14	10	21	15	17	21	28	33	34	193	21.44%
合計	100	100	100	100	100	100	100	100	100	900	100.00%

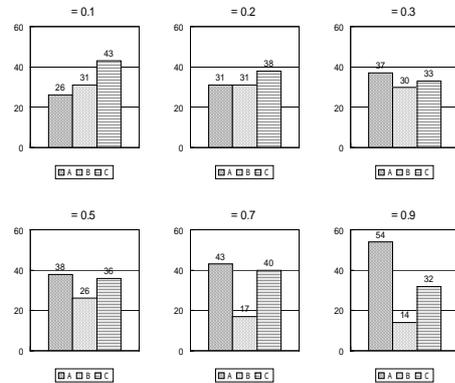


図 11. 最小近接頻度数 (3 分割, 降順)

表 2. 各パラメータでの最小近接頻度 (全等)

	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	合計	確率
-1	42	41	43	33	28	30	16	18	13	264	29.33%
-0.9	2	1	1	2	1	3	3	0	1	14	1.56%
-0.8	1	0	0	1	4	1	3	4	3	17	1.89%
-0.7	1	1	1	1	1	3	1	1	3	13	1.44%
-0.6	1	0	0	0	5	2	1	2	4	15	1.67%
-0.5	0	0	1	2	1	4	4	4	3	19	2.11%
-0.4	0	1	0	0	2	3	3	3	6	18	2.00%
-0.3	0	0	1	0	2	2	5	8	5	23	2.56%
-0.2	0	0	1	1	1	1	3	8	8	23	2.56%
-0.1	0	0	2	2	2	4	5	4	8	27	3.00%
0	0	2	2	2	2	0	2	4	7	21	2.33%
0.1	0	0	0	4	0	5	4	5	8	26	2.89%
0.2	1	0	1	1	1	2	2	4	3	15	1.67%
0.3	0	0	0	0	1	2	4	6	6	19	2.11%
0.4	1	1	0	2	1	2	5	2	4	18	2.00%
0.5	0	1	0	1	1	0	3	3	2	11	1.22%
0.6	0	0	3	3	4	1	1	2	1	15	1.67%
0.7	0	0	2	3	3	0	4	1	1	14	1.56%
0.8	1	0	0	3	0	1	2	2	2	11	1.22%
0.9	1	0	0	0	1	2	2	1	2	9	1.00%
1	49	52	42	39	39	32	27	18	10	308	34.22%
合計	100	100	100	100	100	100	100	100	100	900	100.00%

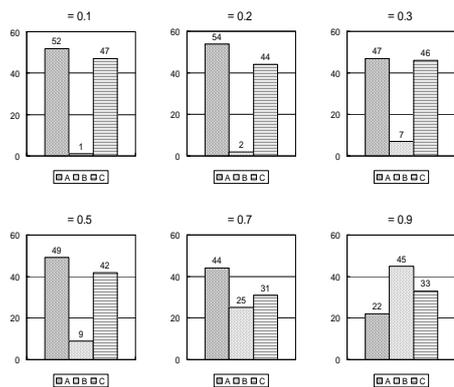


図 12. 最小近接頻度数 (3 分割, 全等)

#### 4. 考察

##### 4.1 降順の場合

変動パラメータが小時には幾何平均法が、変動度合が増加するに伴い算術平均法が、(統計的に)真値に近いウェイト推定能力を持つと言える。但し、7 分割頻度グラフで詳細を見ると、変動小時には、調和平均法、幾何平均法、算術平均法の 3 つの山が存在するが、変動度合の増加と共に、中央の幾何平均の山がなくなり、調和平均と算術平均の 2 つの山が高いと観察できる。

##### 4.2 全等の場合

変動パラメータが小時には、調和平均と算術平均の 2 つの山が存在し、両者の山の高さはほぼ同じと観察できる。変動度合の増加と共に、パラメータ(p)の全域にわたって山は平滑化され、ほぼ平らになる。すなわち、変動パラメータが小時は、調和平均法と算術平均法のどちらかを(どちらが統計的に優位かは今後の課題)変動大時には幾何平均法が真値に近いウェイト推定能力を持つと言える。丁度、降順の場合とほぼ逆の傾向を持つと言える。

##### 4.3 適用法

項目ウェイトがほぼ等しいと予想される場合、すなわち、一対比較値 $a_{ij}$  ( $i, j$ )に 1 前後

の値が多い場合には(4.2)の方針で、一方、項目ウェイトがある程度の差を持つと予想される場合、すなわち、一対比較値 $a_{ij}$  ( $i, j$ )が適当にバラつきのある値を持つ場合には(4.1)の方針でウェイト推定法を選択することが望まれる。

#### 5. おわりに

変動パラメータの大小ならびに推定ウェイト値の分布状況(降順から全等)に応じて、真値に再接近という意味で最適なウェイト推定法(一般化平均のパラメータ p)をシミュレーション実験により調べた。

また、本研究および前研究[3]により変動パラメータ、つまり整合度 CI 値から最適なウェイト推定法を推察することが可能となった。

今後の研究では、標本数を増やして、より信頼性の高いデータを得るとともに、真値に対する設定数値のあり方を検証する必要がある。

#### 参考文献

- [1] 後藤格、稲嶺和哉、篠原正明、大澤慶吉：「ウェイト推定法における最適な一般化平均法」, 日本大学生産工学部第 38 回学術講演会数理情報部会講演概要, pp.93-96 (2005.12)
- [2] 後藤格：「一般化平均法に基づく AHP」, 平成 17 年度日本大学大学院生産工学研究科数理情報工学専攻, 修士論文
- [3] 槍崎将之、大澤慶吉、篠原正明：「シミュレーション実験による変動パラメータと整合度 CI 値の関係」, 日本大学生産工学部第 39 回学術講演会数理情報部会講演概要, pp.61-64 (2006.12)