

各種ウェイト推定法における整合度 CI 値の比較

日大生産工（院） ○ 檜崎 将之

日大生産工 篠原 正明

1. はじめに

AHP(Analytic Hierarchy Process：階層分析法)では、より信頼性の高いデータを解析する為に各一対比較行列の整合度指数である CI(Consistency Index)を求め、その値が 0.1 未満の時に整合性があると、AHP を提唱した T.L.Saaty 氏は述べている〔1〕。

しかし、整合度 CI は一対比較判断の論理的整合性を示す尺度であり、必ずしも一対比較行列の妥当性、あるいは推定値の真値への近さを示すわけではない。

前研究〔2〕では、「理論シミュレーション実験において、誤差度合を小、中、大と変化させていくと最適な一般化平均法は、幾何平均型から算術平均型へと移行すること」が判明している。

理論シミュレーションはあくまでも空想的なシミュレーションであり、現実には真値は判らない。この実験結果を現実問題に役立たせるためには以下の 3 つの課題を明らかにすれば良いと考える。

理論シミュレーション実験において、誤差度合と整合度 CI に相関性がある。

通常は整合度 CI といえば、固有ベクトルに基づく Saaty 整合度を言うが、それ以外の推定ベクトルに基づく整合度でも、整合度間で相関性がある。

追試の意味、標本サイズ、誤差度合の定義を含めて、前実験〔2〕の再確認を行う。

これら、 n 、 N の課題がシミュレーション実験を通して再確認ができれば、前研究〔1〕の判明結果をより現実的な知見『CI 小時には固有ベクトル法あるいは幾何平均法を、CI 大時には算術平均法がより真値に近いウェイトを与える』として、世に提案することができる。

そこで本論では前研究〔3〕に続き、理論シミュレーション実験において、各種ウェイト推定法(固有ベクトル法、算術平均法、幾何平均法、調和平均法)における整合度 CI 間に相関性があるのか検証を行った。

2. シミュレーション実験

真値に基づき $n \times n$ 一対比較行列 W を作成する。その 1 以上の各要素に、一様乱数の乗法型誤差 e を加え、対称な要素は逆数を取り測定一対比較行列 A を生成する。

ここで、 e は平均 1 を持つ確率分布に従う確率変数 E の実現値である。確率変数 E としては、 $[1 - \sigma, 1 + \sigma]$ の一様分布に従うと仮定する。変動パラメータ $\sigma=0$ つまり $e=1$ の時、誤差なしを意味する。

近似固有値に基づく CI と要素誤差平均に基づく CI をそれぞれ算出する。

Comparison of CI Values among various AHP Estimation Methods

Masayuki UTSUGIZAKI and Masaaki SHINOHARA

2.1 近似固有値に基づくCI : CI_{eigen}

固有ベクトル法においては主固有値を用いてCIを定義する。しかしながら、固有ベクトル法以外の推定法を採用した場合には、固有値に基づくCI定義式は使用できない。そこで、近似的に固有値を計算し、その固有値に基づきCI定義式を適用するアプローチが存在する。

測定一対比較行列Aの右固有ベクトル w 、主固有値 λ_{max} は、

$$Aw = \lambda_{max} w \quad (1)$$

を満足する。固有ベクトルでない場合には、一般に(1)式は成立せず、 λ_i を第 i 行の近似固有値とするならば、(2)式が成立する。

$$\sum_j a_{ij} w_j = \lambda_i w_i \quad (i=1, \dots, n) \quad (2)$$

両辺を i について総和し、 λ_i の算術平均を λ_{ave} として、整理すれば次式を得る。

$$CI_{eigen} = \frac{\lambda_{ave} - n}{n-1} \quad (3)$$

これを、近似固有値に基づくCIと定義する。

2.2 要素誤差平均に基づくCI : CI_{error}

一対比較行列Wと測定一対比較行列Aの対角を除く要素毎の倍率誤差の平均値から1を引いた値として定義する。計算式は次式となる。

$$CI_{error} = \left\{ \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} e_{ij} \right\} - 1 \quad (4)$$

ここで、1を引くのは前にも述べたように、要素毎倍率誤差 e_{ij} は「誤差なし」で $e_{ij} = 1$ だからである。

3. 実験内容

1つの変動パラメータに対して20回ずつのシミュレーションを行い、標本値を求めた。

真値を降順で与える場合と1に固定した場合の2つのケースにおいて、真値の個数($N=5, 10, 15$)や変動パラメータ($\sigma=0.1, 0.2, \dots, 0.8, 0.9$)を変化させた時でも各種ウェイト推定法における整合度CI間で相関性が得られるかをシミュレーション実験で検証する。

4. 結果

まず始めに、「 $CI_{eigen} = CI_{error}$ 」つまり「近似固有値に基づくCI値」と「要素誤差平均に基づくCI値」は等価であるという結果が得られた。グラフとして以下に示す。各種ウェイト推定法において、縦軸に CI_{error} 、横軸は CI_{eigen} である(図1、図2)。

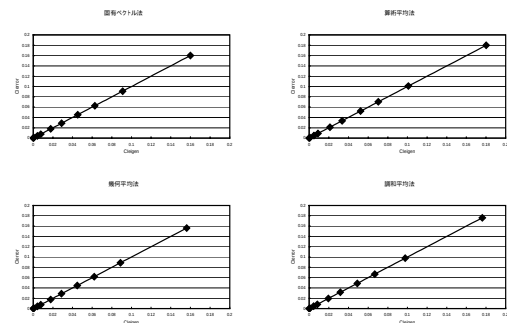


図1. 降順 ($N=5$)

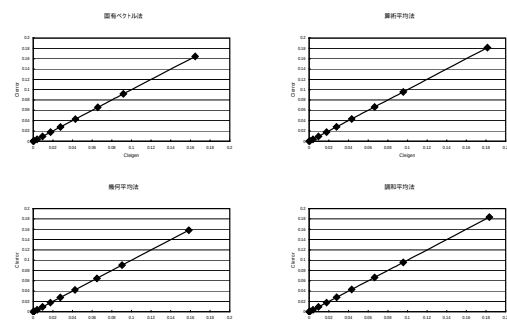


図2. 全等 ($N=5$)

そこでこれ以降は、固有ベクトル法、算術平均法、幾何平均法、調和平均法において求めた、 CI_{eigen} 、 CI_{error} を、ともに共通としたCI値として表記する。例えば、算術 CI_{eigen} と算術 CI_{error} をまとめて算術CIとした。

固有ベクトル法における整合度 CI を横軸に、それ以外の推定法（算術平均法、幾何平均法、調和平均法）での整合度 CI を縦軸にとり、推定法間での相関性を比較する。降順、全等での結果を以下に示す（図 5～図 16）。

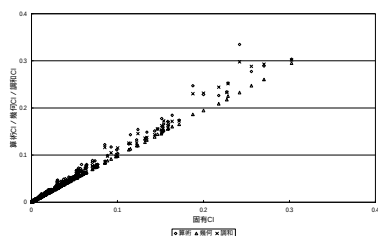


図 3. N=5 (降順)

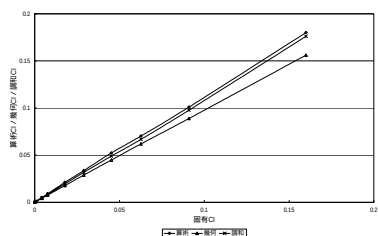


図 4. N=5 (降順，平均)

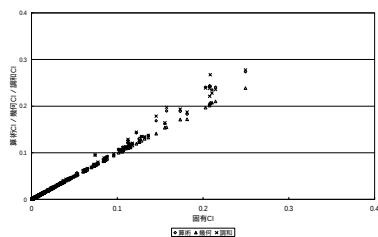


図 5. N=5 (全等)

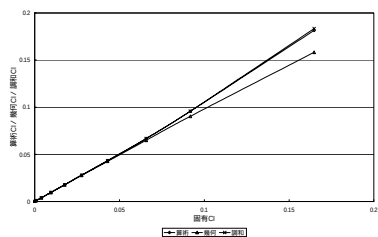


図 6. N=5 (全等，平均)

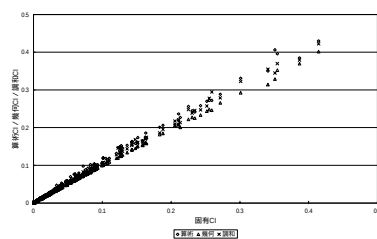


図 7. N=10 (降順)

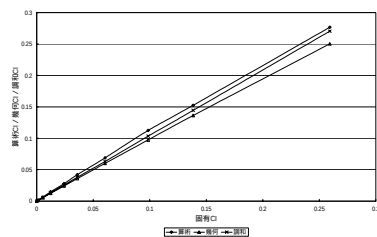


図 8. N=10 (降順，平均)

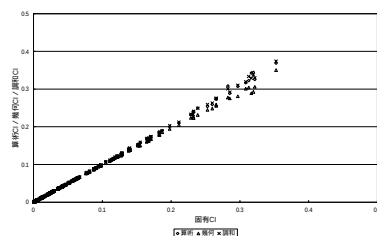


図 9. N=10 (全等)

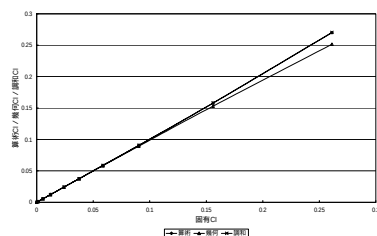


図 10. N=10 (全等，平均)

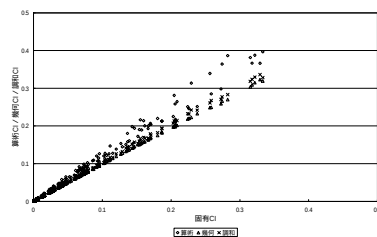


図 11. N=15 (降順)

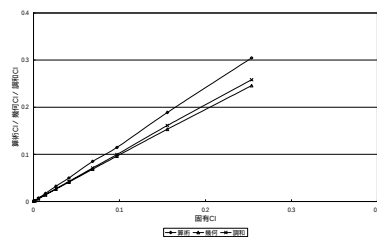


図 12. N=15 (降順，平均)

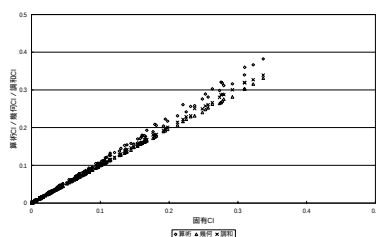


図 13. N=15 (全等)

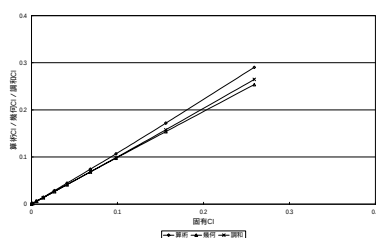


図 14. N=15 (全等, 平均)

5. 考察

5.1 CI_{eigen} と CI_{error}

ウェイト推定法（本論では固有ベクトル法、算術平均法、幾何平均法、調和平均法）において、行毎の近似固有値を求め、その固有値に基づき用いたCI値が、CI値が本来満足すべき要素毎の倍率誤差の平均値から1を引いた値と等価であることが判明した。従って、「 $CI_{\text{eigen}} = CI_{\text{error}}$ 」が成立する。

5.2 ウェイト推定法

固有ベクトル法に対して、幾何平均法は $N=5, 10, 15$ においてほぼ同一なCI値をとる。これは、既知の性質であり、本実験においても確認された。

算術平均法は、全等時での $N=5, 10$ において幾何平均法と近い値となるが、基本的には他の推定法に比べ、大きな値をとる。それは、真値(n)が増えるほど顕著なものとなっている。

調和平均法においては、幾何平均と算術平均との中間に位置することがわかる。

降順と全等においては、固有ベクトル法と幾何平均法は2つのケースにおいて、平

均的にほぼ同一なCI値をとるが、調和平均法は3%程度、算術平均法に至っては14%近くの誤差が生じる。ともに降順時の方が全等時よりも高い値をとる。

6. おわりに

理論シミュレーション実験において、各種ウェイト推定法における整合度CIについて、近似固有値に基づくCIと要素誤差平均に基づくCIの2つを定義し、相関性があることが検証できた。

参考文献

- 〔1〕T.L.Saaty:「The Analytic Hierarchy Process」,RWS Publications ,pp.52 (1996)
- 〔2〕後藤格、稲嶺和哉、篠原正明、大澤慶吉:「ウェイト推定法における最適な一般化平均法」,第38回学術講演会数理情報部会講演概要, pp.93-96 (2005.12)
- 〔3〕槍崎将之、大澤慶吉、篠原正明:「シミュレーション実験による変動パラメータと整合度CI値の関係」,第39回学術講演会数理情報部会講演概要, pp.61-64 (2006.12)
- 〔4〕稲嶺和哉、後藤格、篠原正明、大澤慶吉:「Saaty 整合度CIの持つ意味についての考察 - 推定値に対する倍率誤差との関係 - 」,第38回学術講演会数理情報部会講演概要, pp.89-92 (2005.12)
- 〔5〕槍崎将之、大澤慶吉、篠原正明:「近似固有値に基づくCI値と要素誤差平均に基づくCI値の等価性」,第40回学術講演会数理情報部会講演概要,(2007.12)
- 〔6〕木下栄蔵:「入門 AHP - 決断と合意形成のテクニック - 」,日科技連 (2000)