ＡＨＰ不完全一対比較情報の対数最小二乗解のトポロジー公式

日大生産工　○篠原正明
情報システム研究所　篠原健

1.はじめに

AHPなどでの一対比較情報より項目ウェイトを推定するアルゴリズムの1つに対数最小2乗 (LLS: Logarithmic Least Square)法が存在する。一対比較デザイングラフが完全グラフ(一対比較の完全情報)の場合には、LLS解は一対比較行列の行毎の幾何平均に一致することが知られている。完全グラフでのLLS解は幾何平均という事実は、「LLS解が完全グラフの接続トポロジー状況とその一対比較値 $\{a_{ij}\}$ を用いて、陽的表現可能」を意味する。そこで、デザイングラフが不完全な場合について、そのようなLLS解の陽的表現(トポロジー公式)が可能かを考察する。　2章では、既存研究において解明されているトポロジー公式を調査(review)し、3章では、本論文にて新たに発見・解明したトポロジー公式を提示する。

2. 既存のトポロジー公式（[1],[2]）

2.1 完全グラフの場合（[2]の6.1節）

節点ｊのポテンシャルをu_jとした時に、正規化条件$\sum u_j=0$を付与することにより、LLS解は行毎の幾何平均で与えられる。

2.2 ４節点完全グラフから１本の枝を開放除去した場合[1]

不完全グラフに関するLLS解のトポロジー公式に最初に言及した論文([1]の7節)であり、正規化条件として$\sum u_j=0$を利用し、枝が存在しない区間(図1では(2,4))について仮想的な一対比較値A_{24}、A_{42}（$A_{24}\times A_{42}=1$）を想定することにより、行毎の幾何平均公式が成立する。

$$x_1=(a_{11}a_{12}a_{13}a_{14})^{\frac{1}{4}} \quad (1)$$

$$x_2=(a_{21}a_{22}a_{23}A_{24})^{\frac{1}{4}} \quad (2)$$

$$x_3=(a_{31}a_{32}a_{33}a_{34})^{\frac{1}{4}} \quad (3)$$

$$x_4=(a_{41}A_{42}a_{43}a_{44})^{\frac{1}{4}} \quad (4)$$

$$A_{24}=(a_{21}a_{14})^{\frac{1}{2}}(a_{23}a_{34})^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

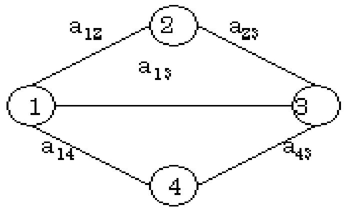

図１：４節点完全グラフから１本の枝を開放除去したグラフの例

但し、a_{ij}は枝(i,j)に対応する項目iの項目jに対する一対比較測定値、x_jは項目(節点j)の推定ウェイトで、$u_j=\log x_j$である。

2.3　木状グラフ（[2]の6.2節）

任意の節点kを基準点（接地アース）とすることによる正規化条件($u_k=0$あるいは$x_k=1$)を採用することにより、節点iのウェイトx_iは、節点iから基準点kへの唯一の経路上の一対比較値の積により表現できる。

2.4　ループ状グラフ([2]の6.3節)

ループ状すなわち1つの閉路のみからなるグラフについては、任意の節点kを基準点とした正規化条件($u_k=0$あるいは$x_k=1$)を採用することにより、節点iのウェイトx_iは、節点iから節点kへの2つの経路上の一対比較値の集合により特徴付けられる。　N個の節点からなるループ状グラフにおいて、節点Nを基準点とすると、[2]の6.3節の(22)式を変形すると次式を得る。

$$u_i=\frac{i}{N}(\alpha_{i,i+1}+\ldots+\alpha_{N-1,N})+\frac{N-i}{N}(\alpha_{i,i-1}+\ldots+\alpha_{1.N}) \quad (6)$$

(6)式の右辺第1項は節点iから節点Nへの昇順経路、第2項は降順経路に対応している（但し、$\alpha=\log a$）。第1項の昇順経路にはN-i本の枝が、第2項の降順経路にはi本の枝が含まれており、枝の本数に反比例して重み付けされていることがわかる。

Topological Formula for LLS Solution under Incomplete AHP Pairwise Comparison

Masaaki SHINOHARA　and　Ken SHINOHARA

これを、「経路長・反比例則」と名付ける。すなわち、2本の経路積を経路長に反比例した重みで幾何平均することにより、項目iのウェイトx_iを得る。

2.5　完全グラフから1本の枝を開放除去した場合([2]の6.4節)

本論文2.2節の内容の一般化であり、正規化条件として$\sum u_k=0$を採用する。
N節点グラフにおいて枝(1,N)を開放除去した場合を考えると、興味深いことに、節点1とN以外の節点に対応するウェイトに関しては幾何平均公式が成立する。

$$x_i=(\prod_{j=1}^{N}a_{ij})^{\frac{1}{N}} \quad (i\neq 1、N) \qquad (7)$$

節点1とNに対応するウェイトに関しては、ダミーの一対比較値A_{1N}、A_{N1}($A_{1N}\times A_{N1}=1$)を導入することにより、形式上の幾何平均公式が成立する。

$$x_1=\left\{(\prod_{k=1}^{N-1}a_{1k})\times A_{1N}\right\}^{\frac{1}{N}} \qquad (8)$$

$$x_N=\left\{A_{N1}\times(\prod_{k=2}^{N}a_{Nk})\right\}^{\frac{1}{N}} \qquad (9)$$

$$A_{1N}=(\prod_{k=2}^{N-1}a_{1k}\cdot a_{kN})^{\frac{1}{N-2}} \qquad (10)$$

以上のN節点グラフの結果（7）～(10)は、本論文2.2節の4節点グラフの結果(1)～(5)の直接的な一般化になっている。ダミー経路として、4節点グラフでは枝長＝2の経路しか存在しないが、N節点グラフ(N>4)では、枝長>2の経路が節点1とNの間に存在するが、ダミー経路としては、枝長＝2の経路のみを考えればよいことが(10)よりわかる。

3．新たなトポロジー公式

2章において、「完全グラフ」、「完全グラフー枝1本」、「木」、「閉路」の場合について既存研究成果としてトポロジー公式が存在することを示した。
ノード数N＝4の連結デザイングラフでは、全ての不完全情報の場合についてトポロジー公式が得られているだろうか？答えは「No!」であり、2章の既存公式ではカバーされていないデザイングラフのトポロジーを図2に示す。

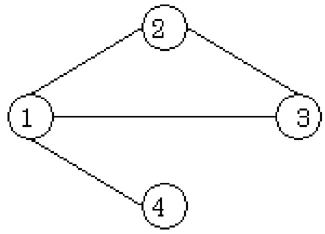

図2:　既存公式ではカバーされないデザイングラフ例

以下に図2のデザイングラフ例をもカバーする新たなトポロジー公式を以下に提案する。

3.1　完全グラフから疎枝集合を開放除去した場合

既存公式(2.5節)は完全グラフから1本の枝を開放除去した場合であるが、新公式は複数本の節点を共有しない(すなわち、疎な)枝集合を除去した場合についても、2.5節と同様なトポロジー公式が得られることを、5節点完全グラフを例(図3)に示す。枝(1,2)と枝(3,4)を開放除去すると、節点5については、節点5から節点集合(1,2,3,4)の方向について、「フロー和＝ポテンシャル差和」として次式(11)が成立する。

$\alpha_{51}+\alpha_{52}+\alpha_{53}+\alpha_{54}+\alpha_{55}=(u_5-u_1)+(u_5-u_2)+(u_5-u_3)+(u_5-u_4)+(u_5-u_5)$　(11)

正規化条件$\sum u_j=0$を採用すれば、節点５のウェイトx_5は、幾何平均式(12)で与えられる。

$x_5=(a_{51}\ a_{52}\ a_{53}a_{54}\ a_{55})^{\frac{1}{5}}$　(12)

開放除去枝（1,2)の節点1、節点2については「フロー和＝ポテンシャル差和」とし、各々(13)、(14)が成立する。

$\alpha_{13}+\alpha_{14}+\alpha_{15}$
$=(u_1-u_2)+(u_1-u_4)+(u_1-u_5)$　(13)

$\alpha_{23}+\alpha_{24}+\alpha_{25}$
$=(u_2-u_3)+(u_2-u_4)+(u_2-u_5)$　(14)

(13),(14)を整理して、各々(15),(16)を得る。

$(u_1-u_2)+(\alpha_{13}+\alpha_{14}+\alpha_{15})=5u_1$　(15)

$(u_2-u_1)+(\alpha_{23}+\alpha_{24}+\alpha_{25})=5u_2$　(16)

(15)－(16)を計算し、整理して(17) を得る。

$(u_1-u_2)=\frac{1}{3}\sum(\alpha_{1j}+\alpha_{j2})$　(17)

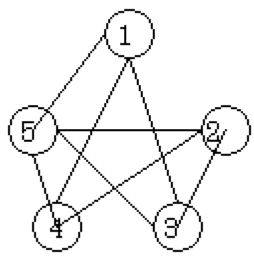

図3：　5節点完全グラフから枝(1,2)と枝(3,4)を開放除去したデザイングラフ例

(17)の左辺を(15)、(16)に代入すると、節点1、2のウェイトx_1、x_2が(18)～(21)式で求まる。

$$x_1=(a_{11}A_{j2}\ a_{13}a_{14}a_{15})^{\frac{1}{5}} \qquad (18)$$

$$A_{12}=(\Pi a_{1j}a_{j2})^{\frac{1}{3}}=(a_{13}a_{32})^{\frac{1}{3}}\ (a_{14}a_{42})^{\frac{1}{3}}\ (a_{15}a_{51})^{\frac{1}{3}} \qquad (19)$$

$$x_2=(A_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25})^{\frac{1}{5}} \qquad (20)$$

$$A_{21}=1/A_{12} \qquad (21)$$

同様にして、開放除去枝(3,4)の節点3、節点4についても、ウェイトx_3、x_4が(22)～(24)式で求まる。

$$x_3=(a_{31}a_{32}\ a_{33}A_{34}a_{35})^{\frac{1}{5}} \qquad (22)$$

$$A_{34}=(a_{31}a_{14})^{\frac{1}{3}}\ (a_{32}a_{24})^{\frac{1}{3}}\ (a_{35}a_{54})^{\frac{1}{3}} \qquad (23)$$

$$x_4=(a_{41}a_{42}A_{43}a_{44}a_{45})^{\frac{1}{5}} \qquad (24)$$

一般の節点数Nのデザイングラフでは、開放除去枝と関与しない節点については、行毎の幾何平均式が、開放除去枝(i,j)の端点となる節点iについては、開放除去枝については、N-2個の2ステップ評価値の1/(N−2)乗根を開放除去枝の仮想一対比較値A_{ij}として、第i行の幾何平均により節点iのウェイトx_iが求まる。

$$x_i=(a_{i1}a_{i2}\cdots A_{ij}\cdots a_{iN})^{\frac{1}{N}} \qquad (25)$$

$$A_{ij}=(\prod_{k\neq i,j} a_{ik}a_{kj})^{\frac{1}{N-2}} \qquad (26)$$

3．2　完全グラフから長さ2の鎖を開放除去した場合

前節3.1のトポロジー公式は図2のトポロジーをカバーしていない。そこで、開放除去対象が疎ではなく枝が連結して鎖となる場合について、5節点完全グラフを例(図4)に考察する。

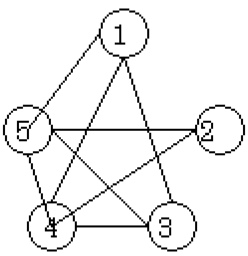

図4：　5節点完全グラフから枝(1,2)と枝(2,3)を開放除去したデザイングラフ例

枝(1,2)と枝(2,3)を開放除去すると、節点4と節点5については、「フロー和＝ポテンシャル差和」として次式(27)、(28)が成立する（総和はｊ＝1,2,3,4,5について）。

$$\sum \alpha_{4j}=\sum(u_4-u_j) \qquad (27)$$

$$\sum \alpha_{5j}=\sum(u_5-u_j) \qquad (28)$$

正規条件$\sum u_j=0$を採用して、節点4,5のウェイトx_4,x_5については行毎の幾何平均が成立する。

節点1,2,3,についての「フロー和＝ポテンシャル差和」は各々(29)、(30)、(31)となる。

$$\alpha_{11}+\alpha_{13}+\alpha_{14}+\alpha_{15}=(u_1-u_3)+(u_1-u_4)+(u_1-u_5) \qquad (29)$$

$$\alpha_{22}+\alpha_{24}+\alpha_{25}=(u_2-u_4)+(u_2-u_5) \qquad (30)$$

$$\alpha_{31}+\alpha_{33}+\alpha_{34}+\alpha_{35}=(u_3-u_1)+(u_3-u_4)+(u_3-u_5) \qquad (31)$$

(29)、(30)、(31)を各々整理すると、(32)、(33)、(34)を得る。

$$\alpha_{11}+(u_1-u_2)+\alpha_{13}+\alpha_{14}+\alpha_{15}=5u_1 \qquad (32)$$

$$(u_2-u_1)+\alpha_{22}+(u_2-u_3)+\alpha_{24}+\alpha_{25}=5u_2 \qquad (33)$$

$$\alpha_{31}+(u_3-u_2)+\alpha_{33}+\alpha_{34}+\alpha_{35}=5u_3 \qquad (34)$$

(32)−(33)を計算して(35)を、(33)−(34)を計算して(36)を得る。

$$3(u_1-u_2)+(u_2-u_3)=\alpha_{13}+\alpha_{14}+\alpha_{15}+\alpha_{42}+\alpha_{52} \qquad (35)$$

$$(u_1-u_2)+3(u_2-u_3)=\alpha_{24}+\alpha_{25}+\alpha_{13}+\alpha_{43}+\alpha_{53} \qquad (36)$$

ここで、(35)、(36)は2元線形連立方程式であり、これより(u_1-u_2)と(u_2-u_3)の陽解が求まり、これを(32)、(33)、(34)に代入すれば、ウェイトx_1,x_2,x_3の陽表現式が得られる。

(u_1-u_2)と(u_2-u_3)の陽解をE_{12}とE_{23}とするならば、

$$E_{12}=\frac{1}{8}\{3(\alpha_{13}+\alpha_{14}+\alpha_{15}+\alpha_{42}+\alpha_{52})-(\alpha_{24}+\alpha_{25}+\alpha_{13}+\alpha_{43}+\alpha_{53})\} \qquad (37)$$

$$E_{23}=\frac{1}{8}\{3(\alpha_{24}+\alpha_{25}+\alpha_{13}+\alpha_{43}+\alpha_{53})-(\alpha_{13}+\alpha_{14}+\alpha_{15}+\alpha_{42}+\alpha_{52})\} \qquad (38)$$

となる。すなわち、存在しない枝(1,2)、(2,3)での仮想的一対比較値をA_{12}、A_{23}($\log A_{12}=E_{12}$，$\log A_{23}=E_{23}$とすれば、(32)、(33)、(34)より、ウェイトx_1,x_2,x_3についても行毎の幾何平均公式が成立する。　さて、(37)、(38)式の{}内を整理すると、E_{12}，E_{23}は(39)、(40)で表現できる。

$$E_{12}=\frac{1}{8}\{3(\alpha_{14}+\alpha_{42})+3(\alpha_{15}+\alpha_{52})+(\alpha_{13}+\alpha_{34}+\alpha_{42})+(\alpha_{13}+\alpha_{35}+\alpha_{52})\} \quad (39)$$

$$E_{23}=\frac{1}{8}\{3(\alpha_{24}+\alpha_{43})+3(\alpha_{25}+\alpha_{53})+(\alpha_{24}+\alpha_{41}+\alpha_{13})+(\alpha_{25}+\alpha_{51}+\alpha_{13})\} \quad (40)$$

すなわち、開放除去枝(1,2)についての仮想一対比較値A_{12}は,1→2への2つの2ステップパスと2つの3ステップパス(1,3,4,2),(1,3,5,2)の評価値に3:3:1:１の割合で幾何平均したものとなっている。開放除去枝(2,3)についても同様の解釈が成立する。

なお、以上は節点数5の場合であるが、節点数4の場合には開放除去枝についての仮想一対比較値は、1つの2ステップパス評価値と1つの3ステップパス評価値に対して2:1の割合で幾何平均したものとなる。又、これより、図2のトポロジーもカバーされ、節点数4のデザイングラフについては全てのトポロジーについてトポロジー公式が得られた！

３．３　完全グラフから三角形を開放除去した場合

5節点完全グラフから三角形(1,2,3)あるいは枝集合{(1,2)、(2.3)、(1,3)}を開放除去した場合(図5)について、節点4、5のウェイトx_4, x_5については、正規化条件$\sum u_j=0$を採用して行毎の幾何平均公式が成立する。三角形の各節点1,2,3についての「フロー和＝ポテンシャル差和」は各々(41),(42),(43)で与えられる。

$$\alpha_{11}+\alpha_{14}+\alpha_{15}=(u_1-u_4)+(u_1-u_5) \quad (41)$$
$$\alpha_{22}+\alpha_{24}+\alpha_{25}=(u_2-u_4)+(u_2-u_5) \quad (42)$$
$$\alpha_{33}+\alpha_{34}+\alpha_{35}=(u_3-u_4)+(u_3-u_5) \quad (43)$$

整理すると、（44）、（45）、（46）を得る。

$$\alpha_{11}+(u_1-u_2)+(u_1-u_3)+\alpha_{14}+\alpha_{15}=5u_1 \quad (44)$$
$$(u_2-u_1)+\alpha_{22}+(u_2-u_3)+\alpha_{24}+\alpha_{25}=5u_2 \quad (45)$$
$$(u_3-u_1)+(u_3-u_1)+\alpha_{33}+\alpha_{34}+\alpha_{35}=5u_3 \quad (46)$$

(44)+(45)+(46)を計算すると、(47)を得る。

$$u_1+u_2+u_3=\frac{1}{5}(\alpha_{14}+\alpha_{15}+\alpha_{24}+\alpha_{25}+\alpha_{34}+\alpha_{35}) \quad (47)$$

(44)の両辺に(u_1-u_1)を加え、(47)を使って整理すると(48)を得る。

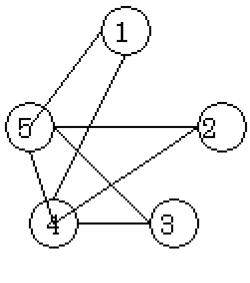

図5：　5節点完全グラフから三角形(1,2,3)を開放除去したデザイングラフ例

$$u_1=\frac{1}{5}(E_{12}+E_{13}+\alpha_{14}+\alpha_{15}) \quad (48)$$

但し、$E_{12}=\frac{1}{2}(\alpha_{14}+\alpha_{42}+\alpha_{15}+\alpha_{52})$ (49)

$$E_{13}=\frac{1}{2}(\alpha_{14}+\alpha_{43}+\alpha_{15}+\alpha_{53}) \quad (50)$$

すなわち、ウェイト1 x_1については、2つの2ステップパス評価値の幾何平均を(1,2)と(1,3)の仮想一対比較値とすれば、形式上は行毎の幾何平均式(51)が成立する。

$$x_1=(a_{11}A_{12}\ A_{13}\ a_{14}a_{15})^{\frac{1}{5}} \quad (51)$$
$$A_{12}=\sqrt{(a_{14}a_{42}).(a_{15}a_{52})} \quad (52)$$
$$A_{13}=\sqrt{(a_{14}a_{43}).(a_{15}a_{53})} \quad (53)$$

同様にして、ウェイト2,3も節点4と5を経由する2つの2ステップパス評価値の幾何平均を(2,3)の仮想一対比較値とすれば、幾何平均式(54)、(55)が成立する。

$$x_2=(A_{21}A_{23}\ a_{24}a_{25})^{\frac{1}{5}} \quad (54)$$
$$x_3=(A_{31}A_{32}\ a_{34}a_{35})^{\frac{1}{5}} \quad (55)$$

４．おわりに

既存トポロジー公式を整理し、グラフ理論的解釈を加えた。また、完全グラフから疎枝集合、1つの長さ2の鎖、1つの三角形を開放した場合について新トポロジー公式を確立し、グラフ理論的解釈を加えた。これの直接的一般化として、完全グラフから疎な長さ2の鎖の集合、疎な三角形の集合、さらに、疎な枝、長さ2の鎖、三角形の混在集合を開放除去した場合が考えられる。さらに、完全グラフからその部分グラフを解放除去するクラスのデザイングラフでは、開放除去に関与しない節点のウェイトでは幾何平均公式が成立することも確認できた。開放除去する部分グラフとして、完全部分グラフ(クリーク)、閉路（サイクル)、その疎な混在混合集合などについてのトポロジー公式の導出については今後の課題である。さらに、完全グラフに何かを付加したトポロジーなど、本論文で扱ったデザイングラフのクラス以外に対するトポロジー公式の確立なども今後の課題である。

参考文献

[１]篠原正明：一対比較デザイングラフにおける評価フローと価値ポテンシャル、2004日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会論文集、pp.36-37(2004.3).

[２] Masaaki Shinohara, Keikichi Osawa, Ken Shinohara: Flow and Potential in Logarithmic Least Squares Estimation of AHP, pp.12.1-12.9, Proceedings of ISAHP 2005, Honolulu, Hawaii, July 8-10, 2005.