

Arrowの背理に対するAHP分析

日大生産工(院) ○長澤 孝憲
日大生産工 篠原 正明

1 はじめに

Arrowの背理とは、個々が合理的な選択をしても、全体として合理的な選択をするとは限らないこと。ここで、合理的な選択とは、推移率が成立すること。一方、循環率とは、推移理とは違って、選択が一意に決まらず、循環してしまうことを循環率という。合成の誤謬とは、個々が合理的な行動をとったとしても、他の多くの人が同じ行動をとることによって、全体として好ましくない結果が生じること。社会科学においては、個人がみんな貯蓄を増やすと、個人は富むが、全体の消費は激減する。これは、「個人を富ます貯蓄が全体を貧しくする」という、いわゆる「ケインズのジレンマ」が有名である。本論では、このArrowの背理に対してAHP分析を用いて、幾何平均、算術平均、そして調和平均に分けてそれぞれ調べる。

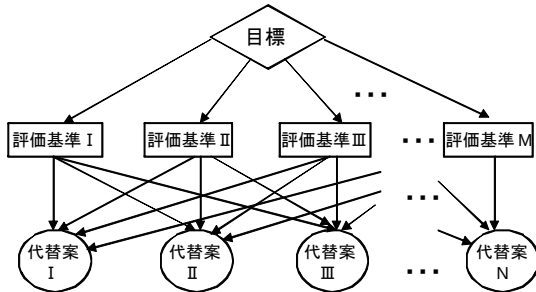


Fig. 1 M評価基準N代替案3階層図

2 Arrowの背理に基づくモデル化

AHP分析の一般化は、Fig. 1で示したようになる。しかし、一般化して示しただけでは、計算することができず、何も示すことができない。そこで、評価基準と代替案を具体的に決め、以下のように決め分析を行う。そこで、まず3つの評価基準から3つの代替案、4つの

評価基準から 4つの代替案と5つの評価基準から5つの代替案のそれぞれを一对比較した場合を考えてみる。

3つの評価基準から3つの代替案については参考文献[1]を参照して頂きたい。

ここでは、4つの評価基準から 4つの代替案と5つの評価基準から 5つの代替案について分析を行う。

評価基準 I から 4つの代替案を相互比較した 4×4 の一对比較行列を $A(1)$ としたとき、評価基準 I からみた4つの代替案間の一对比較値をネットワーク表現する。

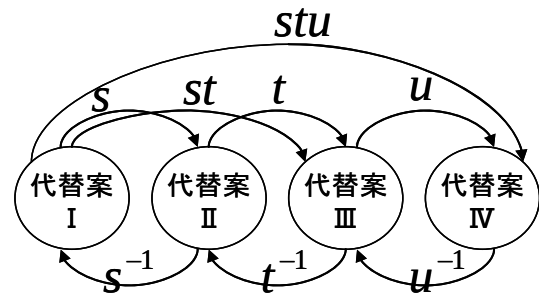


Fig. 2 評価基準 I からみた4つの代替案間の一对比較値をネットワーク表現

代替案 I を基準としたとき、各代替案間の相互関係を次のようにする。

代替案 I > 代替案 II > 代替案 III > 代替案 IV としたとき、これをFig. で表すとFig. 2 になり、また、行列表現すると以下ようになる。

$$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & s & st & stu \\ s^{-1} & 1 & t & tu \\ (st)^{-1} & t^{-1} & 1 & u \\ (stu)^{-1} & (tu)^{-1} & u^{-1} & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Consideration on Arrow's Dilemma via A.H.P.

Takanori NAGASAWA and Masaaki SHINOHARA

$$A(2) = \begin{pmatrix} 1 & (stu)^{-1} & (tu)^{-1} & u^{-1} \\ stu & 1 & s & st \\ tu & s^{-1} & 1 & t \\ u & (st)^{-1} & t^{-1} & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$A(3) = \begin{pmatrix} 1 & u & (st)^{-1} & t^{-1} \\ u^{-1} & 1 & (stu)^{-1} & (tu)^{-1} \\ st & stu & 1 & s \\ t & tu & s^{-1} & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$A(4) = \begin{pmatrix} 1 & t & tu & s^{-1} \\ t^{-1} & 1 & u & (st)^{-1} \\ (tu)^{-1} & u^{-1} & 1 & (stu)^{-1} \\ s & st & stu & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

ここで、 $s > 1, t > 1, u > 1$ とし、 $A(1), A(2), A(3), A(4)$ の各々では、推移率が成立している。よって、 $A(1), A(2), A(3), A(4)$ のそれぞれの CI_i ($i = 1, 2, 3, 4$) は全て 0 となる。

同様にして、評価基準から5つの評価基準か5つの代替案を相互比較した 5×5 の一対比較行列を $B(i)$ とする。

$$B(1) = \begin{pmatrix} 1 & s & st & stu & stuv \\ s^{-1} & 1 & s & st & stu \\ (st)^{-1} & t^{-1} & 1 & u & uv \\ (stu)^{-1} & (tu)^{-1} & u^{-1} & 1 & v \\ (stuv)^{-1} & (tuv)^{-1} & (uv)^{-1} & v^{-1} & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$B(2) = \begin{pmatrix} 1 & (stuv)^{-1} & (tuv)^{-1} & (uv)^{-1} & v^{-1} \\ stuv & 1 & s & st & stu \\ tuv & s^{-1} & 1 & t & tu \\ uv & (st)^{-1} & t^{-1} & 1 & u \\ v & (stu)^{-1} & (tu)^{-1} & u^{-1} & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$B(3) = \begin{pmatrix} 1 & v & (stu)^{-1} & (tu)^{-1} & u^{-1} \\ v^{-1} & 1 & (stuv)^{-1} & (tuv)^{-1} & (uv)^{-1} \\ stu & stuv & 1 & s & st \\ tu & tuv & u^{-1} & 1 & t \\ u & uv & (st)^{-1} & t^{-1} & 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$B(4) = \begin{pmatrix} 1 & t & uv & (st)^{-1} & t^{-1} \\ u^{-1} & 1 & v & (stu)^{-1} & (tu)^{-1} \\ (uv)^{-1} & v^{-1} & 1 & (stuv)^{-1} & (tuv)^{-1} \\ st & stu & stuv & 1 & s \\ t & tu & tuv & s^{-1} & 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$B(5) = \begin{pmatrix} 1 & t & tu & tuv & s^{-1} \\ t^{-1} & 1 & u & uv & (st)^{-1} \\ (tu)^{-1} & u^{-1} & 1 & v & (stu)^{-1} \\ (tuv)^{-1} & (uv)^{-1} & v^{-1} & 1 & (stuv)^{-1} \\ s & st & stu & stuv & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

ここで、 $s > 1, t > 1, u > 1, v > 1$ として $B(1), B(2), B(3), B(4), B(5)$ の各々では、推移率が成立しているから、 CI_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) は全て 0 となる。

3 幾何平均による合成

4つの基準から4つの代替案と5つの評価基準から5つの代替案において、目標から評価基準に対してのそれぞれの重みを以下のようにした。なお、重みの総和は、1とする。まず、目標から4つの評価基準の重みを、

$w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = 0.25$ とし、また、パラメーター s, t, u の値をそれぞれ $s = 2, t = 3, u = 4$ と定めたときの $A(1), A(2), A(3), A(4)$ を幾何平均による合成した一対比較行列

A_{geo} は、次式を得る。

$$A_{geo} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

これは、 $CI = 0$ となることから、4つの評価基準から4つの代替案に対しての幾何平均の合成は、Arrowの背理が成り立たず、また合成の誤謬も成立しない。

次に、目標から5つの評価基準の重みを

$w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = w_5 = 0.2$ とし、4つの評価基準から4つの代替案のときと同様に、 $B(1), B(2), B(3), B(4), B(5)$ を幾何平均による合成した一対比較行列は

$$B_{geo} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4つの評価基準から4つの代替案のときと同様に、5つの評価基準から5つの代替案に対しても、Arrowの背理が成り立たず、また合成の誤謬も成立しない。

従って、3つの評価基準から3つの評価基準、4つの評価基準から4つの代替案と5つの評価基準から5つの代替案のそれぞれについて調べてみたが、幾何平均による合成では、Arrowの背理が成り立たず、また合成の誤謬も成立しないと言えるだろう。

4 算術平均による合成

幾何平均ではなく算術平均で合成した一対比較行列 A_{arith} の成分を

$$A_{arith}(i, j) = \frac{1}{n} \sum_k A(k; i, j)$$

で定義する。

目標から4つの評価基準の重みを

$w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = 0.25$ とし、また、パラ

メーター s, t, u の値をそれぞれ $s = 2, t = 3,$

$u = 4$ と定めたときの $A(1), A(2), A(3), A(4)$

を合成した一対比較行列 A_{arith} は

$$A_{arith} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{217}{96} & \frac{73}{16} & \frac{301}{48} \\ \frac{301}{48} & 1 & \frac{217}{73} & \frac{73}{16} \\ \frac{73}{16} & \frac{301}{73} & 1 & \frac{217}{96} \\ \frac{217}{96} & \frac{73}{16} & \frac{301}{48} & 1 \end{pmatrix}$$

となる。

ここで、各成分について比較する。

$A_{arith}(1, 2) \cdot A_{arith}(2, 1), A_{arith}(2, 3) \cdot A_{arith}(3, 2)$

$A_{arith}(4, 1) \cdot A_{arith}(1, 4) \dots$ の順に比較し、以下の

図で表す。 $A_{arith}(i, j) < A_{arith}(j, i)$ のときを Fig. 3で定義する。

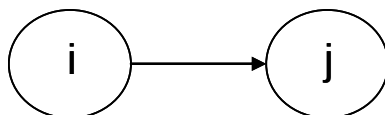


Fig. 3 項目 i, j 間の優越関係

このFig3に従って、比較した結果を図示すると Fig4となる。

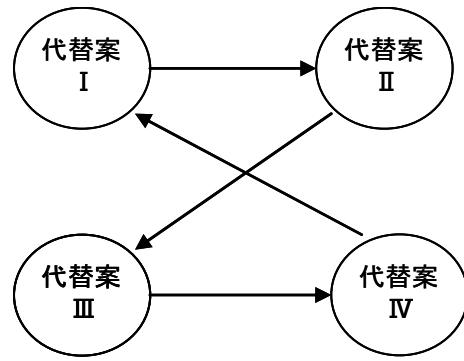


Fig. 4 代替案間の優越関係

Fig.4 を見ると、循環律となり、 $CI \neq 0$ となることから、4つの代替案に対しての算術平均の合成は、Arrowの背理が成り立ち、また合成の誤謬も成立する。同様に、目標から4つの評価基準に対しての重みを $w_1 = w_2 = w_3 =$

$w_4 = w_5 = 0.2$ とし $B(1), B(2), B(3), B(4),$

$B(5)$ を合成した一対比較行列 B_{arith} は

$$B_{arith} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1681}{600} & \frac{4567}{600} & \frac{843}{50} & \frac{7277}{300} \\ \frac{7277}{300} & 1 & \frac{1681}{600} & \frac{4567}{600} & \frac{843}{50} \\ \frac{300}{843} & \frac{7277}{843} & 1 & \frac{1681}{600} & \frac{4567}{600} \\ \frac{50}{4567} & \frac{300}{843} & \frac{7277}{843} & 1 & \frac{1681}{600} \\ \frac{600}{1681} & \frac{4567}{1681} & \frac{843}{7277} & \frac{7277}{7277} & 1 \end{pmatrix}$$

となる。

さきほど同様、各成分について比較する。

$B_{arith}(1, 2), B_{arith}(2, 1), B_{arith}(2, 3), B_{arith}(3, 2)$

$B_{arith}(4, 1), B_{arith}(1, 4) \dots$ の順に比較し、Fig3

に従って図で表すとFig. 5になる。

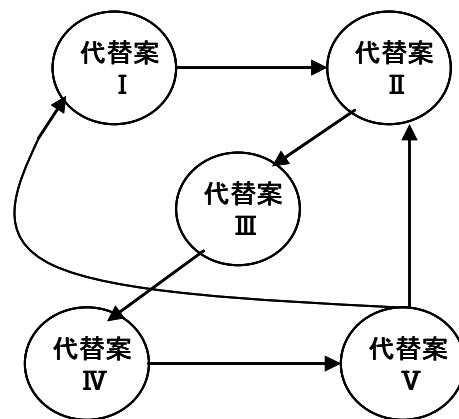


Fig. 5 代替案間の優越関係

Fig5を見ると、部分的に見ると循環律となっているため、全体として $CI \neq 0$ となることから、Arrowの背理が成立し、また合成の誤謬も成立している。

5 調和平均による合成

幾何平均による一対比較行列 A_{har} の成分は

$$A_{har}(i, j) = n \left(\sum \frac{1}{A(k; i, j)^{-1}} \right)^{-1}$$

で定義する。

目標から 4つの評価基準の重みを

$w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = 0.25$ とし、また、パラメーター s, t, u の値をそれぞれ $s = 2, t = 3, u = 4$ と定めたときの $A(1), A(2), A(3), A(4)$ を調和平均による合成した一対比較行列 A_{har} は

$$A_{har} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{48}{301} & \frac{16}{73} & \frac{96}{217} \\ \frac{96}{217} & 1 & \frac{48}{301} & \frac{16}{73} \\ \frac{16}{73} & \frac{96}{217} & 1 & \frac{48}{301} \\ \frac{48}{301} & \frac{16}{73} & \frac{96}{217} & 1 \end{pmatrix}$$

となる。

算術平均のときと同様にして、各成分について比較する。

$$A_{har}(1, 2) \cdot A_{har}(2, 1), A_{har}(2, 3) \cdot A_{har}(3, 2)$$

$A_{har}(4, 1), A_{har}(1, 4) \dots$ と順に比較し、Fig. 3の定義に従うと、Fig. 4になる。従って、循環律となり、 $CI \neq 0$ となることから、4つの代替案に対しての算術平均の合成は、Arrowの背理が成り立ち、また合成の誤謬も成立する。同様に、目標から5つの評価基準に対しての重みを $w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = w_5 = 0.2$ とし $B(1), B(2), B(3), B(4), B(5)$ を合成した一対比較行列 B_{har} は

$$B_{har} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{300}{7277} & \frac{50}{843} & \frac{600}{4567} & \frac{600}{1681} \\ \frac{600}{1681} & 1 & \frac{300}{7277} & \frac{50}{843} & \frac{600}{4567} \\ \frac{1681}{600} & \frac{600}{1681} & 1 & \frac{300}{7277} & \frac{50}{843} \\ \frac{4567}{50} & \frac{1681}{600} & \frac{600}{1681} & 1 & \frac{300}{7277} \\ \frac{843}{300} & \frac{4567}{50} & \frac{1681}{600} & \frac{600}{1681} & 1 \end{pmatrix}$$

となる。

$$B_{har}(1, 2), B_{har}(2, 1), B_{har}(2, 3), B_{har}(3, 2)$$

$B_{har}(4, 1), B_{har}(1, 4) \dots$ の順に比較し、Fig. 3の定義に従うと、Fig. 5になる。Fig5を見ると、部分的に見ると循環律となっているため、全体として $CI \neq 0$ となることから、Arrowの背理が成立し、また合成の誤謬も成立している。

6 考察

今回、3つの評価基準から3つの代替案に対しての幾何平均・算術平均・調和平均をもとに、4つの評価基準から4つの代替案と5つの評価基準について調べた。4つの評価基準から4つの代替案では、算術平均と調和平均では、Arrowの背理が成立した。しかし、パラメーター s, t, u は任意でもArrowの背理は成立するが、目標から評価基準に対しての重みを均等に振り分けないと成立しなかった。一方、幾何平均では、 $CI = 0$ となるから、Arrowの背理は成立しなかった。同様に、5つの評価基準から5つの代替案においても、幾何平均に対しては、Arrowの背理は成立しなかった。

一方、算術平均と調和平均では、Arrowの背理が成立した。こちらも、パラメーター s, t, u は任意でもArrowの背理は成立するが目標から評価基準に対しての重みを均等に振り分けないと成立しなかった。

幾何平均では、3つの評価基準から3つの代替案、4つの評価基準から4つの代替案、5つの評価基準から5つの代替案の全てに対して、Arrowの背理が成立しなかったので、幾何平均では、Arrowの背理の実現は不可能だということが分かった。

7 今後の課題

算術平均と調和平均では、3つの評価基準から3つの代替案と4つの評価基準から4つの代替案、そして、5つの評価基準から5つの代替案の各例においては、Arrowの背理は成立した。6つの評価基準から6つの代替案や4つの評価基準から5つの代替案など色々変化させて検証する必要がある。

また、算術平均と調和平均において、重みを均等にしたら成立したが、重みを均等にしない場合についても調べる必要がある。

参考文献

- [1] 篠原正明、篠原健：AHPにおける整合度とArrowの背理、2006年度秋季日本オペレーションズ・リサーチ学会発表論文集, 2-D-7, pp. 244-245 (2006. 9)