一般化平均概念の一般化

日大生産工　○篠原正明
情報システム研究所　篠原健

1.はじめに

ｎ個のデータX={ｘ$_1$,…, ｘ$_n$}が与えられた時に､次式(１)で定義するｐ乗平均をｐ=１で算術平均、ｐ→0で幾何平均、ｐ=ー1で調和平均、ｐ→＋∞で最大値､ｐ→ー∞で最小値に帰着するところから、一般化平均と呼び、ＡＨＰのウエイト推定アルゴリズムなどに適用されている。

$$G(X;p)=\left(\frac{1}{n}\sum x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (1)$$

この一般化平均概念に関して、(1)確率密度関数、ならびに(2)最小２乗和の２つの視点から一般化を試みる。

２．既存の一般化

(1)式のｘ^{p}をf(x)として、ｐ乗を関数型に一般化した概念(2)が既知である。

$$H(X;f)=f^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum f(x_i)\right) \qquad (2)$$

ｆ(x)=x^{p}とすれば、従来のp乗型一般化平均概念に一致する。ところで、f(x)=log xとした関数型一般化平均も、ｐ→0としたp乗型一般化平均も両者とも幾何平均となる（x^p(p→0)=log x?）。

３．確率密度関数からの一般化

Xを確率変数、xをその実現値、g(x)を確率密度関数とするならば､xの(普通の)期待値E(x)は次式(3)で与えられる。

$$E(x)=\int xg(x)dx \qquad (3)$$

p乗期待値(積率)は、(4)式で与えられる。

$$E(x^p)=\int x^p g(x)dx \qquad (4)$$

ここで、一般化p乗期待値*F(X;p)*を次式(5)で定義する。

$$F(X;p)=\left(\int x^p g(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (5)$$

p=1で、確率密度関数がｎ個のデータに均一分布する場合(6)については、(5)式は算術平均(7)となる。

$$g(x)=\frac{1}{n}\sum\delta(x-x_i) \qquad (6)$$

$$F(X;1)=\frac{1}{n}\sum x_i \qquad (7)$$

一般のpで離散型確率密度関数(6)では、(5)式はp乗型一般化平均(1)に一致する。

$$F(X;p)=G(X;p) \qquad (8)$$

一般化p乗期待値(5)において、p→0とすれば幾何期待値(9)が定義できる。

$$\lim_{p\to 0}F(X;p)=\exp\left\{\int \log x g(x)dx\right\} \qquad (9)$$

(9)式において､離散型確率密度関数(6)を仮定すれば、幾何平均となる。

$$\lim_{p\to 0}F(X;p)=(\Pi x_i)^{\frac{1}{n}} \qquad (10)$$

一般化p乗期待値(5)においてp=ー1で調和期待値も(11)で定義できる。

Generalization of Generalized Mean

Masaaki SHINOHARA　and　Ken SHINOHARA

$$F(X;-1)=\left(\int \frac{g(x)}{x}dx\right)^{-1} \qquad (11)$$

さらに、関数型一般化平均は次式で定義できる。

$$I(X;f)=f^{-1}\left(\int f(x)g(x)dx\right) \qquad (12)$$

あるいは、

$$f\left(I(X;f)\right)=\int f(x)g(x)dx \qquad (13)$$

となる。ここで、(13)式右辺のf(x)は変数Xの変換で、g(x)は確率密度関数であり、両者が対等な項として表れる。

4. 最小2乗和からの一般化

議論簡略化のためｎ＝2とし、x_1＝a、x_2＝bとして話を進める。aとbの算術平均は、2乗和(14)のzについての最小化条件として、aとbの幾何平均は、2乗和(15)のzについての最小化条件として与えられる。

$$S(z;a,b)=(z-a)^2+(z-b)^2 \qquad (14)$$

$$S(z;a,b)=(\log z-\log a)^2+(\log z-\log b)^2 \qquad (15)$$

これをデータｎ個の$X=\{x_1,\cdots,x_n\}$に一般化すれば、最小化すべき関数Sは(16)で表現される。

$$S(z;X)=\Sigma R(z;x_i) \qquad (16)$$

$R(z;x)=(z-x)^2$が算術平均、$R(z;x)=(z^p-x^p)^2$がp乗型一般化平均(1)、$R(z;x)=(f(z)-f(x))^2$が関数型一般化平均(2)である。

従来の一般化平均では、R(z；x)として2乗型の関数を採用している。そこで、2乗型以外の関数型を以下に（その１）～（その４）の4種類考える。ｎ＝2で、x_1＝a,　x_2＝bとして話を進め、それぞれの場合について、S(z；a,b)を最小化するzを導出した。

（その１） $R=(z-x)\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{x}\right)$

$$z=\sqrt{\frac{a+b}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}} \qquad (17)$$

ところで、(17)式は、z＝$\sqrt{ab}$と整理できるが、一般のデータ数nでは、(18)となり、z＝$\sqrt{ab}$の型には変形できない。

$$z=\sqrt{\frac{\sum x_i}{\sum \frac{1}{x_i}}} \qquad (18)$$

(その2)　$R=(z-x)(z^2-x^2)$

$$z=\frac{1}{6}\left(a+b+\sqrt{(a+b)^2+6(a^2+b^2)}\right) \qquad (19)$$

（その３）　$R=(z^p-x^p)\ (z^{-p}-x^{-p})$

$n=2, x_1=a, x_2=b$では、(20)で与えられる。

$$z^{2p}=\frac{a^p+b^p}{a^{-p}+b^{-p}} \qquad (20)$$

すなわち、z＝$\sqrt{ab}$となる。一般のデータ数nでは(21)で与えられる。

$$z^{2p}=\frac{\sum x_i^p}{\sum x_i^{-p}} \qquad (21)$$

(その4)　$R=(z-x)(\log z-\log x)$

$$z=\exp\left\{\frac{1}{2}\log(ab)+\frac{a+b}{2z}-1\right\} \qquad (22)$$

5. おわりに

連続的な確率密度関数の視点からの一般化として、幾何平均、調和平均、ｐ乗平均等の連続分布での平均(期待値)概念を与えた。最小2乗和の視点からは、従来の平均概念は誤差和Sの要素誤差Rが2乗形で与えられる場合であることを示し、要素誤差が2乗形でない場合について考案した。例えば、(その1)は算術平均と調和平均の平方根である。又、(その4)は超越方程式の根として平均が求まる。いずれの場合も、確定値x_0に対しては平均値はx_0となり、平均値としての基本特性を満足している。

ところで、2個の非負実数、a,bに対してそれらの算術平均と幾何平均の算術平均と幾何平均を交互に計算し、その級数の収束値として定義する「算術幾何平均」の概念は、幾何平均がp乗型一般化平均におけるp＝0の平均、算術平均がp＝1の平均に対応するので、(p,q)交互収束平均へと拡張できる。さらに、３個以上の非負実数、a,b,c,..の交互収束平均へと一般化できる。今後の課題とする。