2×2 双行列ゲームの非協力実現可能域境界線は放物線

日大生産工　　○篠原正明
情報システム研究所　　篠原健

１．はじめに

双行列ゲームにおいて相関戦略をも考慮した各プレイヤ期待利得（u,v）の協力実現可能域R_{coope}は、利得行列$A=\{a_{ij}\}, B=\{b_{ij}\}$の各要素対$(u, v)=(a_{ij}, b_{ij})$からなる端点集合の凸包により得られる。一方、各プレイヤが非協力の条件下で確率的に戦略を選択する確率戦略のもとでの各プレイヤ期待利得(u, v)の非協力実現可能域R_{nonco}は、協力実現可能域R_{coope}の部分集合ではあるが（$R_{nonco} \subseteq R_{coope}$）、その境界域の具体的形状は不明である。すなわち、非協力実現可能域R_{nonco}の形状の陽的表現を求めることは困難と考えられ、乱数発生にもとづきプレイヤ利得対(u, v)を 2 次元平面状に多数発生させることにより、その形状を近似的にプロットすることにより、非協力実現可能域の形状を推定していた（[1], [2]）。

非協力実現可能域の形状推定は、非協力ゲームを協力ゲームに転換することにより、協力することによる利得域がどれ程増加するかを見積もる際に、さらには、非協力ゲームの均衡点の特徴付けのためにも、重要な研究課題である。この非協力実現可能域の形状推定に関して、2x2 行列ゲームに限定すれば、2 次元平面(u, v)上の、非協力実現可能域の境界線は、2 次曲線の中でも放物線で与えられることを示すことができた。

２．2x2 双行列ゲームの用語定義など

Ａ：プレイヤ１の２ｘ２利得行列

Ｂ：プレイヤ２の２ｘ２利得行列

x_i:プレイヤ 1 が戦略iをとる確率（$x_i \geq 0$, i=1, 2； $x_1+x_2=1$）

y_i:プレイヤ 2 が戦略iをとる確率（$y_i \geq 0$, i=1, 2； $y_1+y_2=1$）

u :プレイヤ１の期待利得

v :プレイヤ２の期待利得

各プレイヤが非協力確率戦略を採用する条件下では、u, v は次式で与えられる。

$$u=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=(x,1-x)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\ 1-y\end{pmatrix} \quad (1)$$

$$v=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=(x,1-x)\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\ 1-y\end{pmatrix} \quad (2)$$

Boundary of Noncooperative Feasibility Region of 2×2 Bimatrix Game is Parabolic !

Masaaki SHINOHARA　and　Ken SHINOHARA

３．非協力実現可能域の陽的表現

(1)式は u=f(x, y), (2)式は v=g(x, y)なので、両式より、(x, y)を消去して(u, v)のみの関係式を求めることにより、非協力実現可能域の陽的表現を得る。

3.1　零和ゲームの場合

A+B=0 であるため、u+v=0 が成立する。すなわち(u, v)平面上において零和ゲームの実現可能域は原点を通る傾き－1 の直線(v=-u)の「一部」である。ここで、「一部」と言ったのは、元々 0≤x≤1、 0≤y≤1 の制約が課されているため、実現可能域は直線の「一部」の線分となる。

例１

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ａ＋Ｂ＝０であり、零和ゲームである。非協力実現可能域の形状は、図１に示すように、(u, v) ＝ (-1, 1) から (u, v) ＝ (2, -2) の間の線分となる。なお、零和ゲームでは、常に実現可能域は原点を通る傾き－1 の直線(v=-u)の「一部」である。

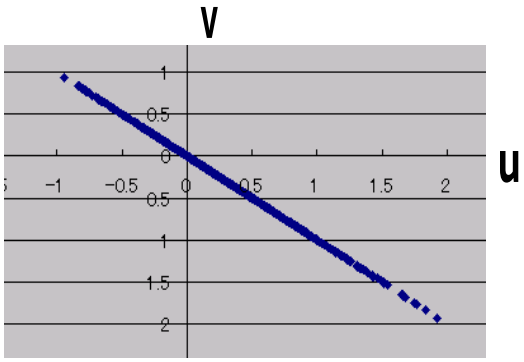

図１　零和ゲームの非協力実現可能域の例

3.2　非零和ゲームの簡単な例

利得行列 A, B が以下で与えられる場合を考える。

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3)

u=xy,　v=(1-x)(1-y)となるため、この両式よりｘを消去すると ｙ^2-(u-v+1)y+u=0 (4) を得る。さて、yに関する 2 次方程式「ｙ^2-(u-v+1)y+u=0」において、yはプレイヤ 2 の戦略 1 をとる確率であるが、その値が実数値で存在するための必要十分条件は、2 次方程式の判別式D=(u-v+1)^2-4uが非負となることである。

(u-v+1)^2-4u≥0 (5)　ここで等号とした曲線(u-v+1)^2-4u=0 が、その判別式D=4-4=0 なので、放物線となる（判別式を調べるまでもなく式の形より明らかであるが)。

(５)式の領域は放物線の外側（非凸域）であり、実現可能域はその「一部」となる。

例２　上記非零和ゲームの非協力実現可能域の形状を図２に示す。この境界線は、楕円でも双曲線の一部でもなく、放物線の一部である。

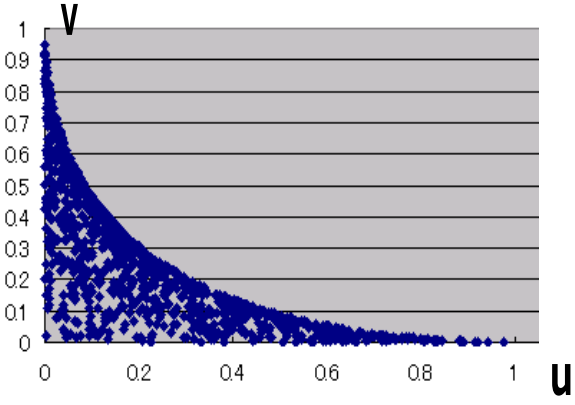

図２　非零和ゲームの非協力実現可能域の例

3.3　2x2 非零和(双行列)ゲームの一般論

利得行列 A,B が以下で与えられる一般的場合を考える。

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

(6)

$u=a_{11}xy+a_{12}x(1-y)+a_{21}(1-x)y+a_{22}(1-x)(1-y)$

$=(a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22})xy+(a_{12}-a_{22})x+(a_{21}-a_{22})y+a_{22}$　$=A_1xy+A_2x+A_3y+A_4$　(7)

但し、$A_1=a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}$、$A_2=a_{12}-a_{21}$、$A_3=a_{21}-a_{22}$、$A_4=a_{22}$

同様に、

$V=B_1xy+B_2x+B_3y+B_4$　(8)

$B_1=b_{11}-b_{12}-b_{21}-b_{22}$、$B_2=b_{12}-b_{22}$、$B_3=b_{21}-b_{22}$、$B_4=b_{22}$

さて、(7)と(8)より、まず x を消去する。

(7)式の両辺にB_1を掛け、(8)式の両辺にA_1を掛け、その差「(9)－(10)」を求める。

$B_1u=A_1B_1xy+A_2B_1x+A_3B_1y+A_4B_1$　(9)

$A_1v=A_1B_1xy+A_1B_2x+A_1B_3y+A_1B_4$　(10)

$(9)-(10):B_1u-A_1v=(A_2B_1-A_1B_2)x+(A_3B_1-A_1B_3)y+(A_4B_1-A_1B_4)$　(11)

(11)式は、x と y に関する一次式なので、これを x について解く。

$x=\{(A_1B_3-A_3B_1)y+(B_1u-A_1v)-(A_4B_1-A_1B_4)\}/(A_2B_1-A_1B_2)$　(12)

すなわち、

$x=Py+Q(u-A_4)-R(v-B_4)$　(13)

$P=(A_1B_3-A_3B_1)/(A_2B_1-A_1B_2)$　(14)

$Q=B_1/(A_2B_1-A_1B_2)$　(15)

$R=A_1/(A_2B_1-A_1B_2)$　(16)

(13)式を(9)式に代入すると、(17)式を得る。

$B_1u=A_1B_1(Py+Q(u-A_4)-R(v-B_4))y+A_2B_1Py+A_2B_1Q(u-A_4)-A_2B_1R(v-B_4)+A_3B_1y+A_4B_1$　(17)

(17)を y に関して整理すると(18)式を得る。

$0=A_1B_1Py^2+\{A_1B_1Q(u-A_4)-A_1B_1R(v-B_4)+A_2B_1P+A_3B_1\}y+\{B_1(A_2Q-1)(u-A_4)-A_2B_1R(v-B_4)\}$　(18)

(18)式を y に関する 2 次方程式とみた時に、y が実数値となるための必要十分条件は判別式 D≧0 であるが、境界線に注目すれば、D=0 で、それは(19)式で与えられる。

$\{A_1B_1Q(u-A_4)-A_1B_1R(v-B_4)+A_2B_1P+A_3B_1\}^2-4A_1B_1P\{B_1(A_2Q-1)(u-A_4)-A_2B_1R(v-B_4)\}=0$　(19)

(19)式は、u と v に関する 2 次曲線であるが、u^2、uv、v^2の項が(19)式中の$\{\}^2$の中にのみ生じているため、計算するまでもなく、u^2、uv、v^2の項に関する判別式は 0 となる。すなわち、2x2 非零和双行列ゲームの非協力実現可能域の境界線は放物線である。また、非協力実現可能域は、放物線の外側（非凸）領域の「一部」であることも言える。

4. おわりに

2x2 双行列非協力行列ゲームの非協力実現可能域は、(u,v)平面状の放物線の外側（非凸）領域に存在することを示した。純粋戦略対からなる端点集合の凸包（非協力実現可能域）さらには、0≦x≦1、 0≦y≦1 に対応する領域などとの共通部分により非協力実現可能域は、表現できる。「協力実現可能域R_{coope}―非協力実現可能域R_{nonco}」が、協力相関戦略によって獲得できる利得域である。

非協力実現可能域境界線が 2 次曲線の中の放物線で表される…と言ったが、厳密に

は、楕円でも双曲線でも表されない…と言うべきである。零和ゲームの場合は、例１の図１に示すごとく直線で表され、さらに以下の付録に示すように、非零和ゲームでも非協力実現可能域境界線が直線で表現できる場合がありうるからである。

2x3、3x2 双行列以上の次元を持つ行列ゲームの非協力実現可能域の陽的表現、さらに、実現可能域と均衡点との関係の解明、などは今後の課題である。

参考文献

[1] 登坂友紀：行列ゲーム期待利得値実現可能集合空間の表計算、平成 17 年度日本大学生産工数理情報卒業研究論文（2005. 3）

[2]五味祐司：非零和行列ゲームの期待利得値実現可能集合空間の表計算、平成 １８年度日本大学生産工卒業研究論文（2006. 3）

付録　非零和ゲームでも非協力実現可能域境界線が直線で表現される場合

例３

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

非協力実現可能域が u 軸上(v=0)に凝縮している例である。

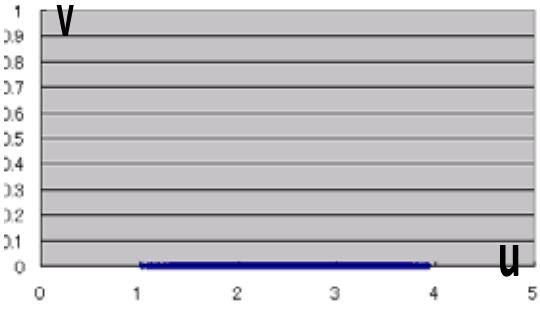

図３　非零和ゲームの非協力実現可能域境界が線分となる例（その１）

例４

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

境界線が、直線 v=−u と直線 v=u の一部で構成される。

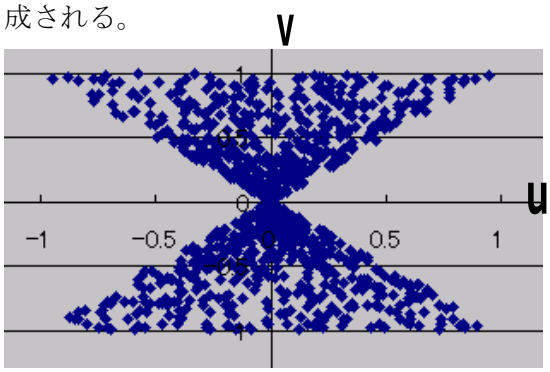

図４　非零和ゲームの非協力実現可能域境界が線分となる例（その２）

例５

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

非協力実現可能域が、直線 v=u の一部で構成される。

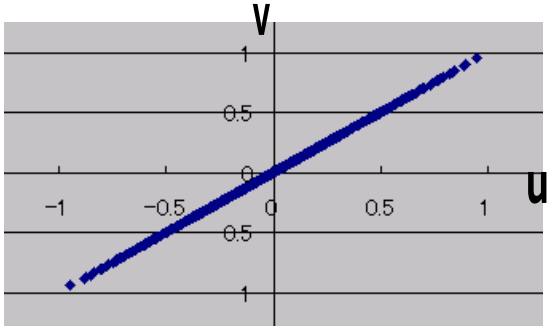

図５　非零和ゲームの非協力実現可能域境界が線分となる例（その３）