2変数再帰形はさみうち法の表計算

日大生産工(学部)　○茂木　渉
日大生産工　　　　篠原　正明

1．　はじめに

多変数非線形連立方程式に帰着される工学上の問題は数多く存在し、その解法としてはNewton法、反復代入法、二乗和最小化法などが代表的である。しかし、Newton法と二乗和最小化法は微分不可関数を含む場合では使用できず、反復代入法では式変形の工夫が必要であるなど、問題点が存在する。

本論では、単変数方程式において、微分不可・不連続関数を含む場合でも1つの解への確実な収束性を持つ「はさみうち法」を、2変数連立方程式に拡張し、そのアルゴリズム及びMicrosoft Excelの表計算インプレメントについて説明する。

2．　はさみうち法

$f(x_\alpha)\cdot f(x_\beta)<0$ となる区間 (x_α,x_β) において、 $x_\alpha<x_\gamma<x_\beta$ を満たす x_γ よりも解が小さければ x_γ を x_β に、大きければ x_γ を x_α に更新することを繰り返す解法であり、前述のとおりに確実な収束性を持つ。

本論における x_γ は、はさみうち法のアルゴリズムにおいて最も基礎的な二分法で決定する。即ち、 $x_\gamma=(x_\alpha+x_\beta)/2$ である。

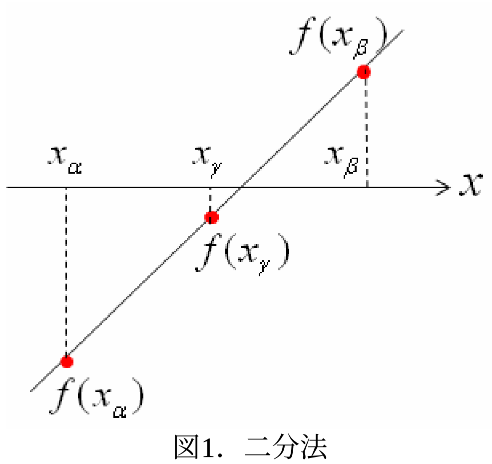

図1．二分法

3．　2変数再帰形アルゴリズム

2つの方程式が変数 x,y の陰関数で表現される場合について考える。

$$f(x,y)=0 \qquad (1)$$
$$g(x,y)=0 \qquad (2)$$

ここで、(2)式が $y=G(x)$ と y についての x の陽関数に変形できれば、これを(1)式に代入することにより(3)式を得られる。

$$f(x,G(x))=0 \qquad (3)$$

(3)式は変数 x のみの関数であり、はさみうち法により容易に解を求めることができる。しかし、(2)式が常に $y=G(x)$ と変形できるとは限らないため、以下のような再帰形はさみうち法STEP1～5により計算する。

STEP1. $x_l<x_u$ で $f(x_l,y_l)\cdot f(x_u,y_u)<0$ を満たす区間 (x_l,x_u) を用意する。ただし、STEP6～8の x_0 を x_l と置いて計算した y_0 を y_l、 x_0 を x_u と置いて計算した y_0 を y_u とする。

STEP2. $x_{new}=(x_l+x_u)/2$ と置く。

STEP3.　STEP6～8の x_0 を x_u と置いて計算した y_0 を y_u とする。

STEP4.　STEP6～8の x_0 を x_{new} と置いて計算した y_0 を y_{new} とする。

STEP5. $f(x_{new},y_{new})\cdot f(x_u,y_u)\le 0$ ならば x の区間を (x_{new},x_u) として x_{new} を x_l に、そうでなければ x の区間を (x_l,x_{new}) として x_{new} を x_u に更新する。

Spread-sheet Calculation of Two-variable Recursive Bisection Method

Wataru MOGI and Masaaki SHINOHARA

区間(x_l, x_u)が十分小さいならば終了し、そうでなければSTEP2へ。

STEP6. $x = x_0$と置く。$g(x_0, y)$はyについての1変数方程式と考えられる。$y_\alpha < y_\beta$で$g(x_0, y_\alpha)\cdot g(x_0, y_\beta) < 0$を満たす区間$(y_\alpha, y_\beta)$を用意する。

STEP7. $y_\gamma = (y_\alpha + y_\beta)/2$とおく。

STEP8. $g(x_0, y_\gamma)\cdot g(x_0, y_\beta) \le 0$ならば、$y$の区間を$(y_\gamma, y_\beta)$として$y_\gamma$を$y_\alpha$に、そうでなければ$y$の区間を$(y_\alpha, y_\gamma)$として$y_\gamma$を$y_\alpha$に更新する。

区間(y_α, y_β)が十分小さければ、このときのyをy_0とし、そうでなければSTEP7へ。

４．計算例

以下の2変数連立方程式を表計算によって解いた結果を示す。（Sheet上の反復計算回数は30回としている）

例1.

$$f(x,y) = 2x - y + 3 \quad (4)$$
$$g(x,y) = x + 3y - 5 \quad (5)$$

収束値　$x = -0.5717$、$y = 1.8571$

$f(x,y) = 4.023\times 10^{-7}$

$g(x,y) = 1.863\times 10^{-7}$

例2.

$$f(x,y) = |x| - y \quad (6)$$
$$g(x,y) = \max\{0.5x + 2, -x + 3\} - y \quad (7)$$

収束値　$x = 4$、$y = 4$

$f(x,y) = 4.470\times 10^{-8}$

$g(x,y) = 9.313\times 10^{-8}$

例3.

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 25 \quad (8)$$
$$g(x,y) = y - \max\{0.5x + 2, -x + 3 - y\} \quad (9)$$

収束値１　$x = 3.3761$、$y = 3.6881$

$f(x,y) = 2.219\times 10^{-6}$

$g(x,y) = 9.313\times 10^{-8}$

収束値２　$x = -3.708$、$y = 3.354$

$f(x,y) = 1.727\times 10^{-7}$

$g(x,y) = -9.313\times 10^{-8}$

例4.

$$f(x,y) = y^3 - 4(x^3 + 1) \quad (10)$$
$$g(x,y) = e^y - e^x - e^{-x} - e^{1/y} - 3 \quad (11)$$

収束値　$x = 1.0596$、$y = 2.0613$

$f(x,y) = 5.788\times 10^{-7}$

$g(x,y) = 4.728\times 10^{-7}$

初期区間(x_l, x_u) (y_α, y_β)は共に$(-100,100)$としている。ただし、例3の収束値２に関しては(x_l, x_u)を$(-100,0)$で求め、また例4では(y_α, y_β)を$(-100,100)$とすると$y_\gamma = 0$となり、$1/y_\gamma$が求められないため、(y_α, y_β)を$(-99,100)$としている。

５．計算例に関する考察

一応は解を求められたことになるが、計算例2及び例3は初期区間$x_l < x_u$が3節STEP1の$f(x_l, y_l)\cdot f(x_u, y_u) < 0$の条件を満たさない。各例の$(x_l, x_u) = (-100,100)$における$f(x_l, y_l)\cdot f(x_u, y_u)$の値は以下のようになる。

例1.　$f(x_l, y_l)\cdot f(x_u, y_u) = -5442.67 < 0$

例2.　$f(x_l, y_l)\cdot f(x_u, y_u) = 9600 > 0$

例3.　$f(x_l, y_l)\cdot f(x_u, y_u) = 1.6\times 10^{8} > 0$

例4.　$f(x_l, y_l)\cdot f(x_u, y_u) = -1.5\times 10^{13} < 0$

例2、例3で解が求められる理由は$f(x_l, y_l)$と$f(x_u, y_u)$が同符号で、$f(x_{new}, y_{new})$が異符号であることだと思われる。

1変数で例を挙げると、図2の場合、初期区間(x_α, x_β)とすると、$f(x_\alpha)\cdot f(x_\beta) > 0$であるが、$f(x_\gamma)\cdot f(x_\beta) < 0$のため区間$(x_\gamma, x_\beta)$に存在する解を求めることができる。

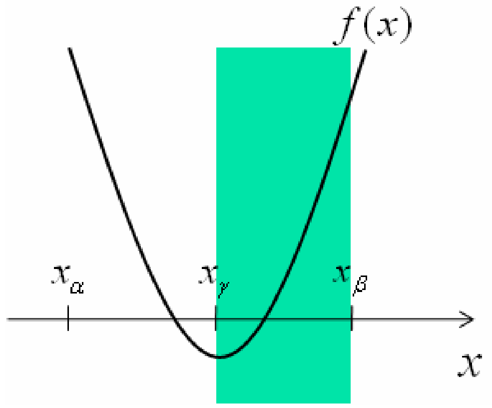

図2.　解を求められる場合

逆に図3の場合は、 $f(x_\alpha)\cdot f(x_\beta)>0$ であり、 $f(x_\gamma)\cdot f(x_\beta)>0$ のため区間 (x_α,x_γ) を探索することとなり、解なしとなる。

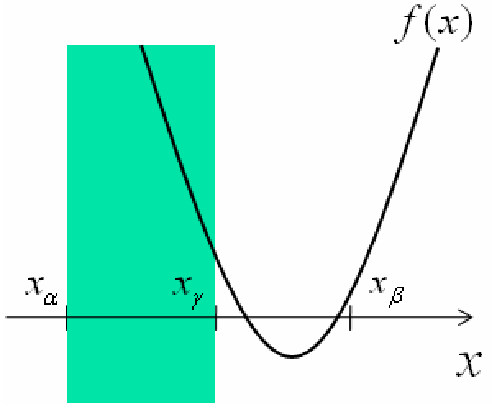

図3. 解を求められない場合

よって、2変数すなわち3節STEP1の条件は正確には、「 $f(x_l,y_l)\cdot f(x_{new},y_{new})\le 0$ または $f(x_{new},y_{new})\cdot f(x_u,y_u)\le 0$ を満たす区間 (x_l,x_u) を用意する」である。

6. アルゴリズムの一般性

参考文献[2]のプログラムにおいては、はさみうち法を行った際の解の区間決定を $f(x_{new},y_{new})$ の符号が正か負かの判定でのみ行われるため、右上がり関数限定という制約があり、右下がり関数の場合は関数にマイナスを付ける必要があった。

しかし、本アルゴリズムでは、$f(x_{new},y_{new})$ と $f(x_u,y_u)$ の積によって解の区間が決定されるので一般性は失われない。例1～4の $f(x,y)$ $g(x,y)$ にマイナスを付けた関数を表計算で解いても同値の解が得られたことからも、このことが言える。

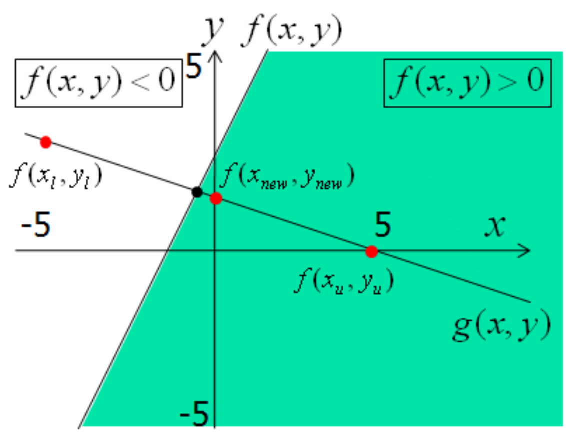

図4. $f(x,y)$ (例1)の領域

7. 終わりに

本論では2変数連立方程式における再帰形はさみうち法を用いた解法について説明した。はさみうち法の「1つの解への確実な収束」という特性により、指定した区間内に解が存在し、かつSTEP1の条件を満たしていれば求めることができる。今回はExcel Sheet上プログラミングの「理解のし易さ」「教育効果」という2つの利点から、2変数連立方程式までとしているが、仮に3変数連立方程式

$$f(x,y,z)=0 \qquad (12)$$
$$g(x,y,z)=0 \qquad (13)$$
$$h(x,y,z)=0 \qquad (14)$$

の解を求める場合でも、3節のアルゴリズムを拡張し、 x_{new},y_{new},z_{new}、 x_u,y_u,z_u を求めるよう、空いているセルや新たなシートを使用することで可能である。

再帰形はさみうち法の問題点としては、通常の1変数はさみうち法と同じく、区間内に複数の解が存在した場合に全ての解を同時に求めることができず、またどの解が優先的に求められるか予測がつかない。

さらに、5節における図2のように $f(x_l,y_l)\cdot f(x_{new},y_{new})\le 0$ または $f(x_{new},y_{new})\cdot f(x_u,y_u)\le 0$ となるような区間をとるようにする必要がある。

確実に解を求めるには初期値を様々に変えることや、Excelでグラフを描くことが有効であると思われる。

全ての解を求めるアルゴリズムについては次の「2変数連立方程式の全解列挙アルゴリズム」で提案する。

8. 参考文献

[1]川口博子、篠原正明：「非線形連立方程式の再帰形解法」『第35回 日本大学生産工学部学術講演会数理情報部会講演概要』(2002.12)、pp67-70

[2] 川口博子、篠原正明：「不連続・微分不可関数を含む非線形連立方程式の多変数Goal Seek機能」『第38回 日本大学生産工学部学術講演会数理情報部会講演概要』(2005.12)、pp75-78

付録

	x下限	x上限	(x下限+x上限)/2
初期値	-100	100	=(B2+C2)/2
	=IF(((2*D2-BE4+3)*(2*C2-BE8+3))<=0,D2,B2)	=IF(((2*D2-BE4+3)*(2*C2-BE8+3))<=0,C2,D2)	=(B10+C10)/2
	=IF(((2*D10-BE12+3)*(2*C10-BE16+3))<=0,D10,B10)	=IF(((2*D10-BE12+3)*(2*C10-BE16+3))<=0,C10,D10)	=(B18+C18)/2
	=IF(((2*D18-BE20+3)*(2*C18-BE24+3))<=0,D18,B18)	=IF(((2*D18-BE20+3)*(2*C18-BE24+3))<=0,C18,D18)	=(B26+C26)/2
	=IF(((2*D26-BE28+3)*(2*C26-BE32+3))<=0,D26,B26)	=IF(((2*D26-BE28+3)*(2*C26-BE32+3))<=0,C26,D26)	=(B34+C34)/2
	※	※	※

	初期値			
ynew下限	-100	=IF((($D2+3*G4-5)*($D2+3*G3-5))<=0,G4,G2)	=IF((($D2+3*H4-5)*($D2+3*H3-5))<=0,H4,H2)	※
ynew上限	100	=IF((($D2+3*G4-5)*($D2+3*G3-5))<=0,G3,G4)	=IF((($D2+3*H4-5)*($D2+3*H3-5))<=0,H3,H4)	※
(y下限+y上限)/2	=(G2+G3)/2	=(H2+H3)/2	=(I2+I3)/2	※
yu下限	=$G$2	=IF((($C2+3*G8-5)*($C2+3*G7-5))<=0,G8,G6)	=IF((($C2+3*H8-5)*($C2+3*H7-5))<=0,H8,H6)	※
yu上限	=$G$3	=IF((($C2+3*G8-5)*($C2+3*G7-5))<=0,G7,G8)	=IF((($C2+3*H8-5)*($C2+3*H7-5))<=0,H7,H8)	※
(y下限+y上限)/2	=(G6+G7)/2	=(H6+H7)/2	=(I6+I7)/2	※
ynew下限	=$G$2	=IF((($D10+3*G12-5)*($D10+3*G11-5))<=0,G12,G10)	=IF((($D10+3*H12-5)*($D10+3*H11-5))<=0,H12,H10)	※
ynew上限	=$G$3	=IF((($D10+3*G12-5)*($D10+3*G11-5))<=0,G11,G12)	=IF((($D10+3*H12-5)*($D10+3*H11-5))<=0,H11,H12)	※
(y下限+y上限)/2	=(G10+G11)/2	=(H10+H11)/2	=(I10+I11)/2	※
yu下限	=$G$2	=IF((($C10+3*G16-5)*($C10+3*G15-5))<=0,G16,G14)	=IF((($C10+3*H16-5)*($C10+3*H15-5))<=0,H16,H14)	※
yu上限	=$G$3	=IF((($C10+3*G16-5)*($C10+3*G15-5))<=0,G15,G16)	=IF((($C10+3*H16-5)*($C10+3*H15-5))<=0,H15,H16)	※
(y下限+y上限)/2	=(G14+G15)/2	=(H14+H15)/2	=(I14+I15)/2	※
ynew下限	=$G$2	=IF((($D18+3*G20-5)*($D18+3*G19-5))<=0,G20,G18)	=IF((($D18+3*H20-5)*($D18+3*H19-5))<=0,H20,H18)	※
ynew上限	=$G$3	=IF((($D18+3*G20-5)*($D18+3*G19-5))<=0,G19,G20)	=IF((($D18+3*H20-5)*($D18+3*H19-5))<=0,H19,H20)	※
(y下限+y上限)/2	=(G18+G19)/2	=(H18+H19)/2	=(I18+I19)/2	※
yu下限	=$G$2	=IF((($C18+3*G24-5)*($C18+3*G23-5))<=0,G24,G22)	=IF((($C18+3*H24-5)*($C18+3*H23-5))<=0,H24,H22)	※
yu上限	=$G$3	=IF((($C18+3*G24-5)*($C18+3*G23-5))<=0,G23,G24)	=IF((($C18+3*H24-5)*($C18+3*H23-5))<=0,H23,H24)	※
(y下限+y上限)/2	=(G22+G23)/2	=(H22+H23)/2	=(I22+I23)/2	※
ynew下限	=$G$2	=IF((($D26+3*G28-5)*($D26+3*G27-5))<=0,G28,G26)	=IF((($D26+3*H28-5)*($D26+3*H27-5))<=0,H28,H26)	※
ynew上限	=$G$3	=IF((($D26+3*G28-5)*($D26+3*G27-5))<=0,G27,G28)	=IF((($D26+3*H28-5)*($D26+3*H27-5))<=0,H27,H28)	※
(y下限+y上限)/2	=(G26+G27)/2	=(H26+H27)/2	=(I26+I27)/2	※
yu下限	=$G$2	=IF((($C26+3*G32-5)*($C26+3*G31-5))<=0,G32,G30)	=IF((($C26+3*H32-5)*($C26+3*H31-5))<=0,H32,H30)	※
yu上限	=$G$3	=IF((($C26+3*G32-5)*($C26+3*G31-5))<=0,G31,G32)	=IF((($C26+3*H32-5)*($C26+3*H31-5))<=0,H31,H32)	※
(y下限+y上限)/2	=(G30+G31)/2	=(H30+H31)/2	=(I30+I31)/2	※
ynew下限	=$G$2	=IF((($D34+3*G36-5)*($D34+3*G35-5))<=0,G36,G34)	=IF((($D34+3*H36-5)*($D34+3*H35-5))<=0,H36,H34)	※
ynew上限	=$G$3	=IF((($D34+3*G36-5)*($D34+3*G35-5))<=0,G35,G36)	=IF((($D34+3*H36-5)*($D34+3*H35-5))<=0,H35,H36)	※
(y下限+y上限)/2	=(G34+G35)/2	=(H34+H35)/2	=(I34+I35)/2	※
yu下限	=$G$2	=IF((($C34+3*G40-5)*($C34+3*G39-5))<=0,G40,G38)	=IF((($C34+3*H40-5)*($C34+3*H39-5))<=0,H40,H38)	※
yu上限	=$G$3	=IF((($C34+3*G40-5)*($C34+3*G39-5))<=0,G39,G40)	=IF((($C34+3*H40-5)*($C34+3*H39-5))<=0,H39,H40)	※
(y下限+y上限)/2	=(G38+G39)/2	=(H38+H39)/2	=(I38+I39)/2	※
	※	※	※	

図5．2変数再帰形はさみうち法(例1)のExcel Sheet上プログラム

※Excelのcopy、drag機能を使用。初期区間にもよるが、30step程度でほぼ収束する。