

グラフ理論におけるカバリングとパッキング(その 3)

——点型 Gallai の定理の一般化——

日大生産工 〇篠原正明
情報システム研究所 篠原健

1. はじめに

(その 1)[1]においては、適当に定義された接続行列 M に対して、4 つの整数線形計画問題(ILP)を定式化し、それらの間に「双対」、「逆」、「転置」の関係を導入し、問題を整理した。(その 2)[2]においては、 M として様々な接続行列を想定することにより、König の定理、Menger の定理、Dilworth の定理、MINFVS、MINFAS、等が(その 1)の提案枠組でとらえられることを示した。

本論文(その 3)においては、(その 1)の 4 章の[性質,13]、[性質,14]、《注意.1》において、点型 Gallai の定理を ILP の逆関係にもとづき証明したが、ILP の逆関係を発展させて、点—ブロック接続行列への一般化を試みる(ブロックとは点集合)。

2. 準備

2.1 Gallai の定理

点被履数を α_0 、線被履数を α_1 、点独立数を β_0 、線独立数を β_1 とするならば、任意の連結グラフについて、(1)式が成立する。

$$\alpha_0 + \beta_0 = \alpha_1 + \beta_1 = \text{点数} \quad (1)$$

(1)式において、 $\alpha_0 + \beta_0 = \text{点数}$ を点型 Gallai の定理と呼ぶ。

点型 Gallai の定理は、「部分点集合が最大点独立集合ならば、補部分点集合は最小点被履集合」、「部分点集合が最小点被履集合ならば、補部分点集合は最大点独立集合」であることにより、グラフ理論的には比較的容易に証明できる。一方、(その 1)[1]では、最小点被履点集合問題と最大点独立点集合問題が ILP の逆関係にある点を利用した証明法を提案した。

2.2 線形計画法の逆関係等価変換

x, y を n 次元縦実変数ベクトル、 c を n 次元横実定数ベクトル、 d, e, g を n 次元縦実定数ベクトル、 b, f を m 次元縦実定数ベクトル、 A を $(m \times n)$ 実定数行列とするならば、変数 x を持つ線形計画問題 P は、 $e = x + y$ という変数変換により、変数 y を持つ線形計画問題 R に等価変換できる。但し、 $f = Ae - b$, $g = e - d$ である。

Covering and Packing in Graph Theory —Part III—

—Generalization of Vertex type Gallai Theorem—

Masaaki SHINOHARA and Ken SHINOHARA

— P —

目的関数: $z = cx \rightarrow \max$

制約条件: $Ax \leq b$

$$d \geq x \geq 0$$

— R —

目的関数: $w = cy \rightarrow \min$

制約条件: $Ay \geq f$

$$e \geq y \geq g$$

3. 点型 Gallai の定理の ILP 逆関係による証明[1]

2.2 節の逆関係等価変換において、 A を連結グラフの枝一点接続行列とするならば、 $e=1$ とすれば、 $Ae=A1=21$ となるため、 $b=1$ なので $f=Ae-b=21-1=1$ 、又、 $b=1$ ならば $d=1$ としても題意は不変であり、 $g=0$ となる(但し、 $0,1$ は各々適当な大きさの全要素 0 、全要素 1 の縦ベクトルである)。すなわち、 x, y に整数制約を付加すれば、 P は最小点被覆点集合問題、 R は最大点独立点集合問題となる。すなわち、 x と y の各要素は $0,1$ であり、 $x+y=1$ なので、これより x と y の間に相補性が成立する点重み c をも考慮した点型 Gallai の定理の原型が証明された。

4. 点型 Gallai 定理の一般化・拡張

Hedetniemi による(枝で点が接続/非接続の概念を一般化した)hereditary 性にもとづく定理の一般化がすでに存在するが、線形計画法の逆関係等価変換にもとづく新たな一般化を以下に 3 つ示す。

4.1 点重みベクトル c の考慮

3 節の証明にも述べたように、 $c=1$ に限定されないで、点型 Gallai 定理は成立する。

(例 1) 図 1 のグラフにおいて $c=$

$(3,1,1,1)$ では、 c - 最大独立点集合は $x=(1,0,0,0)$ で、 c - 最小点被覆集合は $y=(0,1,1,1)$ となる。重みに負値が存在しても、例えば、 $c=(1,-1,0,-1)$ でも同じ結果を得る(なお、ここで転置記号 T を省略したが、これ以降も誤解が発生しない範囲で転置記号 T を省略する)。いずれの場合も、 $x+y=1$ 、 $cx+cy=c1$ が成立する。 $c=(3,1,1,1)$ の場合は、節点①を 3 個コピー並置したグラフでの通常のカバリングとパッキングと解釈できるが、負値あるいは少数値が重みに含まれる場合はその解釈は難しい。

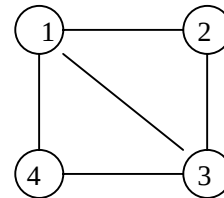


図 1 無向グラフの例

[例 1 終]

4.2 多重カバリングと多重パッキング

3 節の証明において、 $e=p1, b=q1$ とする。すると、 $Ae=2p1$ となり、 $f=Ae-b=2p1-q1=(2p-q)1$ 、また $b=q1$ ならば $d=q1$ としてもかまわないので、 $q=e-d=(p-q)1$ となる。すなわち、最大独立点集合問題は、各枝は $b=q1$ 以下の重複下で各点を $d=q1$ を上限に多重パッキングする問題となり、一方、最小点被覆問題は、各枝は $f=(2p-q)1$ 以上のカバリング重複の条件下で各点で全枝を $e=p1$ を上限、 $q=(p-q)1$ を下限に多重カバリングする問題となる。

(例 2) $p=q=1$ とすれば 1 重カバリングと 1 重パッキングである。図 1 のグラフで $c=(1,1,1,1)$ でかつ $p=q=2$ とした 2 重カバリングと 2 重パッキングでは、最大パッキング解は $x=(1,1,1,1)$ (あるいは $x=$

(0,2,0,2))、最小カバリング解は $y = (1,1,1,1)$ (あるいは $y = (2,0,2,0)$)となる。いずれの場合も、 $x + y = e = 21$, $cx + cy = 1x + 1y = 211 = 2 \times \text{点数}$ が成立する。

【例2終】

4.3 枝一点接続行列の枝の一般化

3章で示したように点型 Gallai 定理が成立するのは、枝一点接続行列 A について、 $A \mathbf{1} = 2 \mathbf{1}$ が成立するためである。すなわち、「枝は2つの点に接続している」という一見すると自明の事実である。任意の $(0,1)$ 行列 A について、 $A \mathbf{1} = k \mathbf{1}$ が成立する場合を以下に考察する。すなわち、 $k=2$ の場合には、 $(0,1)$ 行列 A はある無向グラフの枝一点接続行列であり、各行には丁度2つの1要素が存在する。一般の k の場合には、 $(0,1)$ 行列 A の各行には丁度 k 個の1要素が存在する。例えば $k=3$ では、各行は3つの点からなる部分集合(3点集合)に対応している。普通の無向グラフは枝を2点集合とした場合であり、このような方向でのグラフの一般化として、Hypergraph がある。

【例3】 $b=1$ 、 $e=1$ とし、 $k=3$ とすれば、 $Ae = A \mathbf{1} = 3 \mathbf{1}$ となるため、 $b=1$ なので、 $f = Ae - b = 31 - 1 = 21$ 、又、 $b=1$ ならば $d=1$ としても題意は不変であり、 $g=0$ となる。

主問題 P は、3点集合への最大点パッキング問題(解 x)であり、逆問題 R は、3点集合に対する点による最小2重カバリング問題(解 y)であり、両者の解 x と解 y の間には $x + y = 1$ が成り立つ。

図2の3点集合群あるいは(2)式の3点集合一点接続行列を考えよう。ここで、点は5つあり、①,②,③,④,⑤である。3点集合(ブロック)は4つあり、 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$,

$\boxed{4}$ である。ブロック一点接続行列 A では、行にブロックを、列に点を対応させるので、 4×5 の行列である。ブロック $\boxed{1}$ には点①, ②,③が含まれるので、式(2)のブロック一点接続行列 A の第1行は第1, 2, 3列要素が1で他要素は0である。図2のブロック一点包含関係図においても、ブロック $\boxed{1}$ の中に点①,②,③が含まれているのがわかる。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

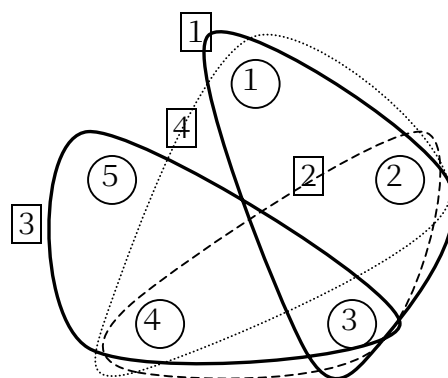


図2 3点集合群の例

各3点集合から、重複なく、なるべく多くの点を選ぶ最大点パッキング解は $x = (1,0,0,0,1)$ であり、各3点集合に対する点による最小2重カバリング解は $y = (0,1,1,1,0)$ となる。すなわち、①と⑤以外の点は各3点集合で重複せずにパックできず、①と⑤は極大である(最大でもある)。又、②,③,④を抑えれば、4つの3点集合を2度以上カバーしており、それ以下の点数では不可能である(極小であり、かつ最小)。この x と y の対に関して、 $x + y = 1$ という一種の相補性が成り立つ。他の解としては以下が存在す

る。

$$x=(1,0,0,1,0), \quad y=(0,1,1,0,1)$$

$$x=(0,1,0,0,1), \quad y=(1,0,1,1,0)$$

[例3終]

(例4) $k=3$ で、 $b=21, e=1$ とすれば、 $Ae=31$ となるため、 $b=21$ なので、 $f=Ae-b=31-21=1$ 、又、 $d=1$ とすれば、 $g=e-d=0$ となる。

主問題 P は、3点集合への許容重複度2 ($b=21$ なので)の下での上限1回限り ($d=1$ なので)の最大点パッキング問題(解 x)であり、逆問題 R は、3点集合に対する点による最小カバリング問題(解 y)であり、両者の解 x と解 y の間には、 $x+y=1$ が成り立つ。図2の3点集合群(あるいは式(1))の例では、 $x=(1,1,0,0,1)$ 、 $y=(0,0,1,1,0)$ が1つの解の対である。①,②,⑤をパックした後は、どの点を追加しても、どこかの3点集合で許容重複度=3となってしまうので、これが極大である(最大でもある)。③,④を押さえればすべての3点集合を少なくとも1度はカバーしており、これ以下には減らせない。この例では、他にも多くの相補解の対が存在する。

[例4終]

(例5) 図2において3点集合④が存在しない場合、すなわち、(3)式の3点集合一点接続行列を考えよう。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

この場合には、 $x=(1,1,0,1,1)$ 、 $y=(0,0,1,0,0)$ が唯一の相補解の対である。

[例5終]

5. おわりに

点型 Gallai の定理に関して、点と枝からなる通常の無向グラフについて、目的関数の係数重みベクトル、右辺制約定数ベクトルを考慮した一般化、点と点集合(ブロック)の包含関係を表す(0,1)行列について、 k 点集合の場合についての一般化を提案し、一般化点型 Gallai の定理が成立することを例示した。なお、4.2節、4.3節では点重みベクトル c を考慮していないが、4.1節同様に点重みベクトル c を考慮しても一般化点型 Gallai の定理は成立する。

本成果と、2部グラフにおける König の定理、代表系の問題、枝型 Gallai の定理、などとの関連性の研究、(0,1)行列 A 以外への、更なるカバリングとパッキング系の諸問題への拡張・一般化も今後の課題である。

参考文献

- [1] 篠原正明：グラフ理論におけるカバリングとパッキング(その1)ークリークカット問題、一般化彩色問題一、日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会論文集 pp.65-66(1973.4)
- [2] 篠原正明：グラフ理論におけるカバリングとパッキング(その2)一道、閉路、逆 König の定理一、日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会論文集 pp.67-68(1973.4)