一般的な平面 Class A Bezier 曲線の対話的制御

日大生産工(院)　○平岩 智之　　日大生産工　吉田典正
東京農工大学　斎藤隆文

1.　はじめに

自動車業界において,自動車のボディなどの高度に美的な外観曲面は，Class A 曲面と呼ばれる.G. Farin は,Class A 曲面に利用可能な Class A Bezier 曲線を提案した[1].Class A Bezier 曲線の特殊な場合である典型的な平面 Class A Bezier 曲線を 2 次 Bezier 曲線のように３点によって制御する手法が提案されている[2]．また，典型的な Class A Bezier 曲線は，次数を上げていくとその極限において対数螺旋になることが示されている[4]．しかしながら，典型的でない一般的な Class A Bezier 曲線に関しては，対話的な生成手法が明らかになっていない．本報告では，典型的な Class A Bezier 曲線からスタートし，Class A Bezier 曲線の制御点を生成するための行列成分を摂動させ，最適化プロセスによって両端点での条件（両端点での位置と接線方向の拘束）を満足させることによって，一般的な Class A Bezier 曲線を生成する手法を提案する．また，曲率対数グラフを表示することで曲線の性質について考察する.

2.　Bezier 曲線

Bezier 曲線はパラメトリック曲線であり,パラメータ t における曲線上の点 $x(t)$ は次のように定義される.

$$x(t)=\sum_{i=0}^{n} b_i B_i^n(t) \qquad (1.1)$$

ただし，b_i は制御点，$B_i^n(t)$ は Bernstein 多項式[1]である.

Bezier 曲線は，凸閉包性，アフィン不変性，de Casteljau アルゴリズム[1]などの様々な優れた性質やアルゴリズムを持つが,キーラインに利用するという観点では図１に示すような問題点をもつ場合がある．図１では，曲線とともに，曲率中心の軌跡である縮閉線が表示されている．これらの縮閉線から，図１に示す Bezier 曲線の曲率変化が単調でないことが分かる．曲率変化の単調でない曲線セグメントは，キーラインとして適していない.

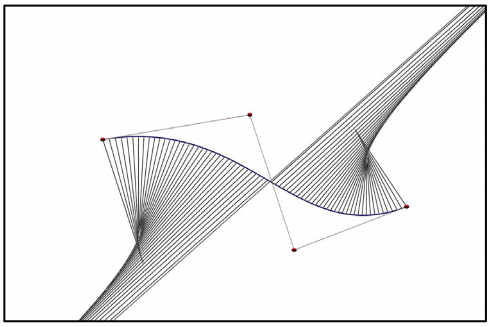


図１　３次 Bezier 曲線の縮閉線

3.　Class A Bezier 曲線と典型的曲線の対話的制御

Class A Bezier 曲線は,G.Farin によって提案された曲率および捩率変化の単調な空間曲線である[1]．n 次 Bezier 曲線の制御点を $\mathbf{b}_0,\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_n$ とし，$\Delta\mathbf{b}_i=\mathbf{b}_{i+1}-\mathbf{b}_i$ $(i=0,\ldots,n-1)$ とする．ある行列 M が与えられ,

$$\Delta\mathbf{b}_i = M^i\cdot\Delta\mathbf{b}_0 \qquad (i=1,\ldots,n-1) \qquad (2)$$

であり，行列 M に関して次の関係

$$\|(1-t)\mathbf{v}+tM\mathbf{v}\|\ge\|\mathbf{v}\| \quad for\ t\in[0,1]\ and\ for\ all\ \|\mathbf{v}\|=1 \qquad (3)$$

が成り立つ時に，曲率および捩率が単調となる．式(3)を満たす行列 M を用いて，式(2)で表される制御点を持つ Bezier 曲線を Class A Bezier 曲線と呼ぶ．式(3)を満足する行列 M は，単位円（空間曲線の場合には単位球）上へ向かうベクトルを行列 M によって変換してできる形状が単位円（単位球）と交差しないことを意味する．図２に,式(3)を満足する場合としない場合の例を示す．本研究では，平面曲線を対象とするが,本節のここまでの議論は空間曲線においても成り立つ．以降は，平面曲線を対象とする.

行列 M を回転角 $\theta(<\pi/2)$ および拡大縮小率 T によって

$$M=\begin{bmatrix} T\cdot\cos\theta & T\cdot-\sin\theta \\ T\cdot\sin\theta & T\cdot\cos\theta \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Interactive Control of General Planar Class A Bezier Curves

Tomoyuki HIRAIWA, Norimasa YOSHIDA and Takafumi SAITO

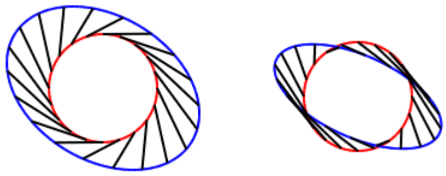


図２　式(3)を満足する行列による
変換（左）と
満足しない行列による変換（右）

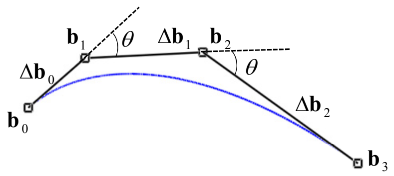


図３　典型的な
平面３次 Class A Bezier 曲線

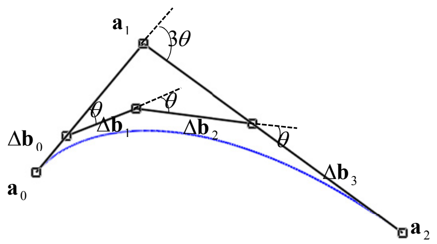


図４　典型的な
平面４次 Class A Bezier 曲線の
対話的制御

と表したとき，次の条件を満足する場合に，行列 M は，式(3)を満足する．

$$\cos\theta > \frac{1}{T} \qquad (5)$$

この条件は，もともとは Mineur らによって示されたものであり [3]，平面 Class A Bezier 曲線は Mineur らの条件を一般化したものである．行列 M が式(4)によって表わされる Class A Bezier 曲線を典型的な Class A Bezier 曲線と呼ぶ（図３）．

文献 [2,4] では，図４に示すように，３点 $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ を指定することによって，両端点での位置と接線方向の拘束条件を満足させながら，n 次 Class A Bezier 曲線の制御点を自動的に計算する手法を考案した [2,4]．

３点 $\mathbf{a}_i(i=0\ldots2)$ をユーザが指定し，両端での位置と接線方向の拘束条件を満足する n 次 Class A Bezier 曲線の制御点 $\mathbf{b}_i(i=0\ldots n)$ を求める問題を考える．端点での拘束条件から，$\mathbf{b}_0=\mathbf{a}_0$，$\mathbf{b}_n=\mathbf{a}_2$ である．

T は次のように定義される．

$$T=\frac{|\Delta\mathbf{b}_1|}{|\Delta\mathbf{b}_0|}=\frac{|\Delta\mathbf{b}_2|}{|\Delta\mathbf{b}_1|}=\cdots\frac{|\Delta\mathbf{b}_{n-1}|}{|\Delta\mathbf{b}_{n-2}|} \qquad (6)$$

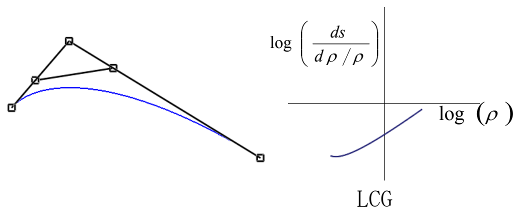
$\Delta\mathbf{a}_0=\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_0$，$\Delta\mathbf{a}_1=\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_1$ と定めたとき，θ は $\Delta\mathbf{a}_0$ と $\Delta\mathbf{a}_1$ のなす角の $1/(n-1)$ である．$\begin{bmatrix}u_x & u_y\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\Delta\mathbf{a}_0/|\Delta\mathbf{a}_0|$ とし，式(2)から次の式を得ることにより，最適化手法によって次式がゼロベクトルとなるような $|\Delta\mathbf{b}_0|$ と T を求める．

$$f(T,|\Delta\mathbf{b}_0|)=\sum_{j=0}^{n-1}|\Delta\mathbf{b}_0|\cdot M^j\begin{bmatrix}u_x\\u_y\end{bmatrix}-(\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_0) \qquad (7)$$

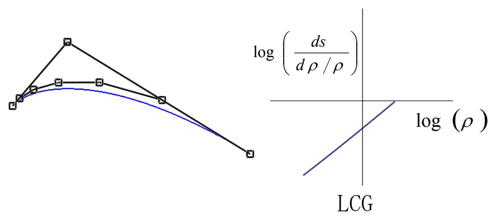
$|\Delta\mathbf{b}_0|$ と T が求まったら，式(2)よりすべての制御点を求めることができる．

4.　典型的な Class A Bezier 曲線と曲率対数グラフ

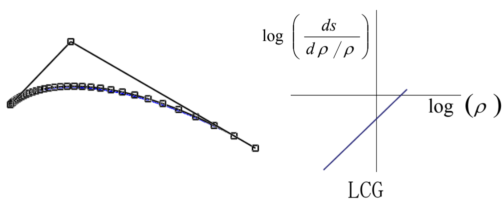
Class A Bezier 曲線と他の曲線を関連性を検証するために曲率対数グラフ(Logarithmic Curvature Graph，以下 LCG，従来は曲率対数分布図と呼んだ)を用いる．LCG は原田らによって提案された手法 [6] であり，曲線の性質を分析するツールとして使用することができる．



(a)３次　傾き 0.552　分散 1.019



(b)６次　傾き 0.806　分散 0.011



(c)33 次　傾き 0.965　分散 $4\cdot10^{-6}$

図４　典型的な平面 Class A Bezier 曲線の次数による LCG の変化

LCG の傾きが 0 ならば Nielsen のスパイラル，1 ならば対数螺旋，2 ならば円のインボリュート，-1 ならばクロソイド曲線，±∞ ならば円となる．

LCG は曲率 κ ，曲率半径 ρ である曲線式を x と置いた時，

$$\log(\rho) \tag{8}$$

を x 軸に，　なおかつ，

$$\frac{dk}{ds}=\frac{\det\left(\dot{x},x^{(3)}\right)\dot{x}\cdot\dot{x}-3\det\left(\dot{x},\ddot{x}\right)\dot{x}\cdot\ddot{x}}{\left|\dot{x}\right|} \tag{9}$$

$$\frac{d\rho}{ds}=-\frac{1}{\kappa^2}\frac{d\kappa}{ds} \tag{10}$$

を用いて計算する．

$$\log\left(\frac{ds}{d\rho/\rho}\right) \tag{11}$$

を y 軸に取ることで作成する．図４に典型的な Class A Bezier 曲線の LCG を最小二乗法により直線で近似し，直線の傾きと分散を求めたものを示す．

図４に示したように，典型的な Class A Bezier 曲線の次数を高くすると傾きが 1，分散が 0 に近づくことが分かる．これより，典型的な Class A Bezier 曲線の次数を増加させると，対数螺旋に近似することが確認できる．

5.　一般的な Class A Bezier 曲線の生成

一般的な Class A Bezier 曲線の生成は典型的な Class A Bezier 曲線の行列 M の成分を摂動させることによって生成する．従って，本研究で提案する一般的な Class A Bezier 曲線は，対数螺旋への近似である曲線（典型的曲線）から，曲率単調性と両端点での拘束条件を満足させたまま行列 M の成分を摂動させることによって生成され，典型的曲線よりも高い自由度を持つ．

一般的な Class A Bezier 曲線を生成させるため，行列 M をパラメータ $\delta_0,\delta_1,\delta_2,\delta_3$ によって次のように摂動させる．

$$M_G=\begin{bmatrix} T\cdot\cos\theta+\delta_0 & T\cdot-\sin\theta+\delta_1 \\ T\cdot\sin\theta+\delta_2 & T\cdot\cos\theta+\delta_3 \end{bmatrix} \tag{12}$$

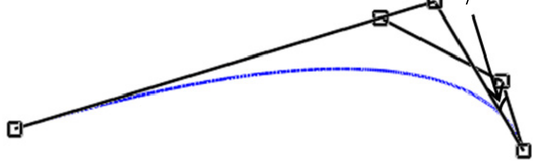


図５　最適化誤差 ϕ

$\delta_0,\delta_1,\delta_2,\delta_3$ がすべて 0 の場合は，典型的な Class A Bezier 曲線に一致する．しかし，これらがひとつでも 0 でない場合は，θ が 2 節で述べたように求められなくなり端点での位置と接線方向の拘束を満足しなくなる．そこで，$\left|\Delta\mathbf{b}_0\right|,T$ に θ と ϕ（図５）も最適化の変数として加え，

$$f\left(T,\left|\Delta\mathbf{b}_0\right|,\theta\right)=\left|\sum_{j=0}^{n-1}\left|\Delta\mathbf{b}_0\right|\cdot M_G^{\,j}\begin{bmatrix}u_x\\u_y\end{bmatrix}-\left(\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_0\right)\right|+\phi \tag{13}$$

が 0 になるような $\left|\Delta\mathbf{b}_0\right|,T,\theta$ を求める．これらのパラメータが求まったら，式(2)によりすべての制御点を算出する．

上記の方法で，一般的な Class A Bezier 曲線を生成することができるが，$\Delta\mathbf{b}_0$ の向きによって，$\Delta\mathbf{b}_0$ と $M_G\cdot\Delta\mathbf{b}_0$ のなす角が変化してしまい生成される曲線が相似変換のもとに不変でなくなる．そこで，$\Delta\mathbf{b}_0$ を必ず x 軸の正の方向を向くように事前に変換し，最適化を行い，元に戻すという処理を行っている．

図６，７に，一般的な Class A Bezier 曲線を生成した実行結果を示す．

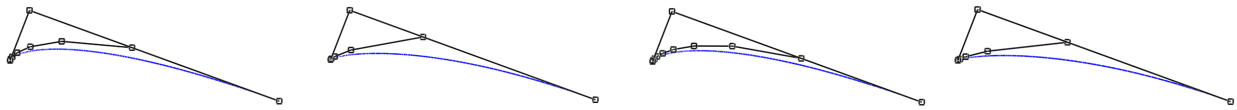
6.　まとめと今後の展望

本研究では，n 次の一般的な平面 Class A Bezier 曲線を対象とし，3 個の制御点によって対話的に描画する手法を提案した.今後の展望としては，パラメータ $\delta_0,\delta_1,\delta_2,\delta_3$ の値の変化に対する曲線形状および曲率プロットの変化の関係を明らかにすること，および空間曲線化などが挙げられる．

参考文献

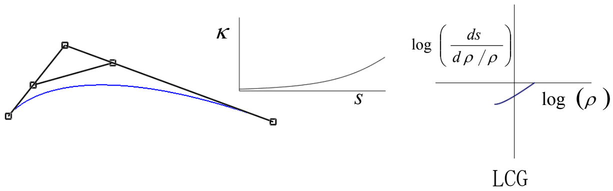
1) G. Farin, Class A Bezier curves, Computer Aided Geometric Design, 23(7), pp.573-581, 2006.
2) 平岩智之，吉田典正，斎藤隆文，平面 class a bezier 曲線の対話的制御，情報処理学会第 69 回全国大会，pp. 173 - 207, 2007.
3) Y. Mineur. A shape controlled fitting method for Bezier curves. Computer Aided Geometric Design, Vol. 15, No. 9, pp.879-891, 1998.
4) 吉田典正，斎藤隆文，平岩智之，曲率単調な曲線セグメントの対話的制御，Visual Computing/グラフィクスと CAD 合同シンポジウム，pp.19-24, 2007.
5) 平岩智之，吉田典正，斉藤隆文，一般的な平面 Class A Bezier 曲線の対話的生成，2007 年度精密工学会秋季大会，

pp353-354, 2007.
6) 原田利宣，森典彦，杉山和夫，曲線の物理的性質と自己アフィン性，デザイン学研究，Vol.42，No.2，pp.33-40，1995.

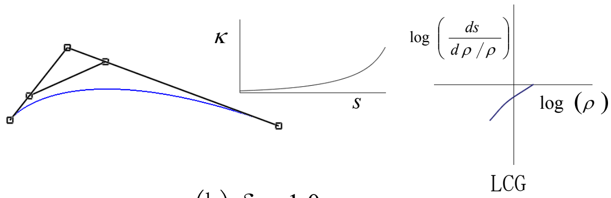


(a)7 次 $\delta_0 \ldots \delta_3 = 0.0$　(b)7 次 $\delta_0, \delta_2 = 1.0$ $\delta_1, \delta_3 = 0.5$　(c)10 次 $\delta_0 \ldots \delta_3 = 0.0$　(d)10 次 $\delta_0, \delta_2 = 1.0$ $\delta_1, \delta_3 = 0.5$

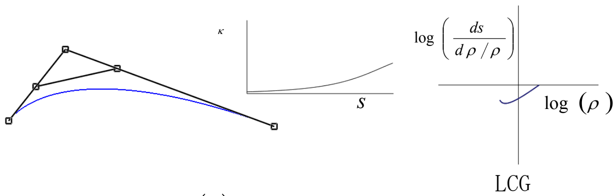
図６　高次の一般的な平面 Class A Bezier 曲線



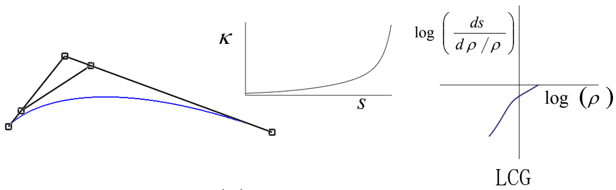
(a)　$\delta_0 \ldots \delta_3 = 0.0$



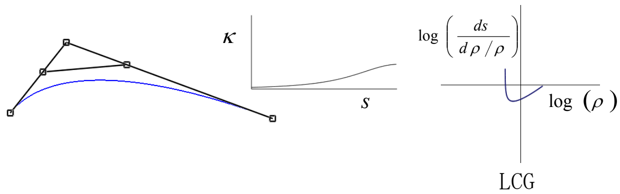
(b) $\delta_0 = 1.0$



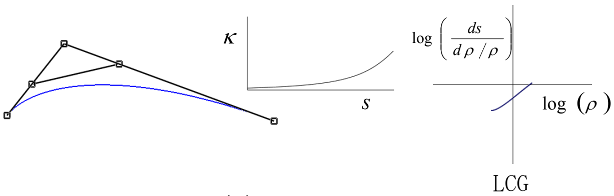
(c) $\delta_0 = -0.25$



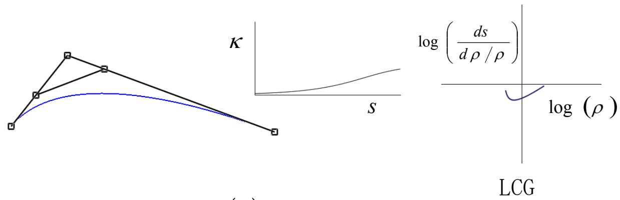
(d) $\delta_1 = 1$



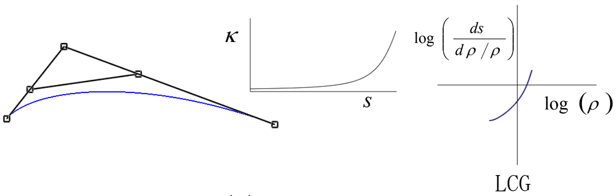
(e) $\delta_1 = -0.27$



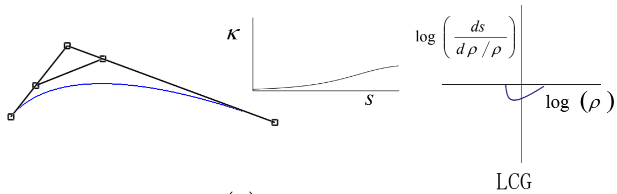
(f) $\delta_2 = 0.525$



(g) $\delta_2 = -0.7$



(h) $\delta_3 = 0.65$



(i) $\delta_3 = -0.3$

図７　一般的な平面４次 Class A Bezier 曲線（表示されていない δ_i の値はすべて 0）