

一般逆行列に基づくたわみ角法による平面ラーメンの構造解析に関する研究

日大生産工 ○ 川島 晃
日大生産工 花井 重孝

1. はじめに

故小野薫博士は、矩形ラーメンの解法以外にはあまり利用されていなかった「たわみ角法」の適合条件に対し、「Kinematische Theorie に従った直角変位図」を利用する方法を示し、節点系に適用された仮想仕事式(せん力方程式)を提案された¹⁾。この成果は不規則ラーメンの解法²⁾へと進展し、一般的な、たわみ角法として確立された³⁾⁴⁾。その業績は「田中尚博士⁵⁾によってまとめられ、リミットデザインにも通じている」³⁾。また故小野博士は、矩形ラーメンにおける振動撓角法も提案されている⁶⁾。その後、周知のように有限要素法が開発され、またコンピュータ利用技術の進展とともに各種の精度の高い解析技術に関する多様な研究が進められている⁷⁾⁸⁾。ここに、「力学的抽象を行った次元で、複雑なものを巧妙に処理する、たわみ角法」を発展させた研究は極めて少ない。文献9)10)は不規則ラーメンの適合条件の数値計算にJordan法を利用している。近年では六車らの研究¹¹⁾があるが、不規則ラーメンのリンク機構の自動計算が煩雑となるため、適用範囲が矩形ラーメンに限られている。

本研究は、たわみ角法¹⁾に一般逆行列を活用する新たな構造解析法の開発を目的としている。

本論文では応力法に関する研究成果¹²⁾を踏まえ、基本関係式の一般解と解の存在条件がもつ力学的解釈を、たわみ角法との対応において考察し、知見を述べる。なお、一般逆行列に関する知識は文献13)14)から学べる。

2. 系全体の基本関係式と記号の説明

本節では、微小変位仮定での幾何学的関係式と力の釣合式および構成式を記述する。

座標は右手系とする。記号は英文字とギリシャ文字を用い、スカラーは小文字細字、ベクトルは小文字太字、行列は大文字太字で表す。ベクトルおよび行列の転置は上付添字Tで表す。

2.1 幾何学的関係式(適合条件式)

部材に用いる記号は、図1に示す通りである。

- ・部材の伸縮と節点変位の関係

$$\Delta l = \mathbf{A}_\ell \mathbf{u} \quad (1)$$

- ・部材角と節点変位の関係

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}_r \mathbf{u} \quad (2)$$

上式(1)(2)において、 Δl と $\mathbf{r}$ はそれぞれ部材(p)の伸縮 $\Delta \ell_{(p)}$ と部材角 $r_{(p)}$ を部材番号順に並べたベクトルである。 $\mathbf{u}$ は節点(N)に生じる変位ベクトル $\mathbf{u}_{(N)}$ を節点番号順に並べたベクトルである。部材数をm、節点変位の自由度を n_u とすると、適合行列 $\mathbf{A}_\ell$ と $\mathbf{A}_r$ は (m, n_u) 行列となる。節点角 θ に関する適合条件式は、平面ラーメン

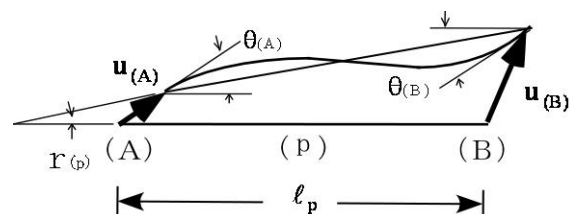


図1 幾何学的関係式に用いる部材の記号

A Study on the Stress Analysis of Plane Frames by Slope Deflection Method Based on Generalized Inverse Matrix

Akira KAWASHIMA, Shigetaka HANAI

における「剛節の条件」(部材の1端が剛接合で他端がピン接合の場合はその基本式を用いる)より割愛する。

2.2 力の釣合式

部材に用いる記号は、図2に示す通りである。

・力のモーメントと材端曲げモーメントの釣合

$$\bar{\mathbf{m}} = \mathbf{B}_m \mathbf{m} \quad (3)$$

ここに、 $\bar{\mathbf{m}}$ は節点(N)に作用する力のモーメント $\bar{m}_{(N)}$ を節点番号順に並べたベクトルである。また、 $\mathbf{m}$ は部材(p)の材端曲げモーメント $m_{(A,p)}$, $m_{(B,p)}$ を部材番号順に並べたベクトルである。節点角の自由度を $n_\theta (= n_u / 2)$ とすると、行列 $\mathbf{B}_m$ は $(n_\theta, 2m)$ 行列となる。

・外力と軸方向力およびせん断力の釣合式

$$\mathbf{f} = \mathbf{B}_\ell \mathbf{n} + \mathbf{B}_r \mathbf{q} \quad (4)$$

上式において、 $\mathbf{f}$ は節点(N)に作用する外力ベクトル $\mathbf{f}_{(N)}$ を節点番号順に並べたベクトル、 $\mathbf{n}$ と $\mathbf{q}$ はそれぞれ部材(p)の軸方向力 $n_{(p)}$ とせん断力 $q_{(p)}$ を部材番号順に並べたベクトルである。また、釣合行列 $\mathbf{B}_\ell$ と $\mathbf{B}_r$ は適合行列を用いると

$$\mathbf{B}_\ell = \mathbf{A}_\ell^T, \quad \mathbf{B}_r = \mathbf{A}_r^T \quad (5-1,2)$$

である。

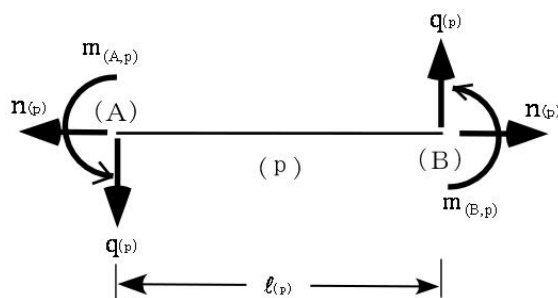


図2 釣合式に用いる部材の記号

2.3 構成式

・材端曲げモーメントと節点角・部材角の関係

$$\mathbf{m} = \mathbf{K}_{\theta\theta} \boldsymbol{\theta} + \mathbf{K}_{\theta r} \mathbf{r} \quad (6)$$

・せん断力と節点角・部材角の関係

$$\mathbf{q} = \mathbf{K}_{r\theta} \boldsymbol{\theta} + \mathbf{K}_{rr} \mathbf{r} \quad (7)$$

式(6)(7)において、 $\boldsymbol{\theta}$ は節点(N)に生じる節点角 $\theta_{(N)}$ を節点番号順に並べたベクトルである。構成行列 $\mathbf{K}_{\theta\theta}$ は (n_θ, n_θ) 行列、 $\mathbf{K}_{\theta r}$ は (n_θ, m) 行列、 $\mathbf{K}_{rr}$ は (m, m) 行列である。 $\mathbf{K}_{r\theta}$ は、

$$\mathbf{K}_{r\theta} = \mathbf{K}_{\theta r}^T \quad (8)$$

の関係にある。

3. 一般解がもつ力学的意味

本節では、一般逆行列に基づく幾何学的関係式(式(1))と力の釣合式(式(4))の一般解がもつ力学的意味をたわみ角法¹⁾との対応において説明する。なお、一般逆行列は、行列の右肩に+を付けて表す。

幾何学的関係式の一般解

まずたわみ角法¹⁾を引用し、本解析の着眼点と知見を述べる。

「ラーメンを構成する各部材は、各自勝手な極のまわりに回転しうるものではなく、ラーメンの形状に従い一定の法則の下に回転する。この目的のために、ラーメンの各節点をピン接合で置き換えた仮想のトラス(置換トラス)を考える。置換トラスは一般に剛性を欠く不安定トラスであり、その各節点の運動しうる範囲は、材長の変化を無視することによって想像される剛節ラーメンの節点の運動方法と全く一致するものである。ゆえにラーメンにおける各部材の部材角相互の関係を問題にする限りにおいては、便宜上置換トラスの変形を研究してもよい筈である」。

この目的から系全体における部材の伸縮と節点変位の関係式(式(1))を取り上げる。

式(1)の一般解は次式で与えられる。

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}_\ell^+ \Delta \mathbf{l} + (\mathbf{I} - \mathbf{A}_\ell^+ \mathbf{A}_\ell) \boldsymbol{\alpha} \quad (9)$$

ここに、右边第2項において、 $\mathbf{I}$ は (n_u, n_u) 単

位行列で、 $(\mathbf{I} - \mathbf{A}_\ell^+ \mathbf{A}_\ell)$ は対称行列である。また α は任意ベクトルである。

3.1.1 式(9)の力学的意味

1) 第1項 $\mathbf{A}_\ell^+ \Delta \mathbf{l}$ は特解であり、部材の伸縮 $\Delta \mathbf{l}$ による節点変位を表している。

2) 右辺第2項 $(\mathbf{I} - \mathbf{A}_\ell^+ \mathbf{A}_\ell) \alpha$ は余解であり、 $\Delta \mathbf{l}$ とは無関係な節点変位を表すから、剛体変位を表している。

したがって、置換トラスの余解項の係数行列 $(\mathbf{I} - \mathbf{A}_\ell^+ \mathbf{A}_\ell)$ を、ラーメンにおける各部材の部材角相互の関係に利用することができる。ここに、係数行列 $(\mathbf{I} - \mathbf{A}_\ell^+ \mathbf{A}_\ell)$ は、 n_u 個の列ベクトルをもつから、そのうちの独立な列ベクトルを選んで正規化すると、 $s (= n_u - m)$ 個の独立な変位モードベクトル $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_s$ を得る。

3.1.2 一般逆行列に基づく適合条件の定式化

s 個の独立変位モードベクトル $\mathbf{d}_i$ はまとめて、

$$\mathbf{D} = [\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_s] \quad (10)$$

とみると、式(9)右辺第2項は

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A}_\ell^+ \mathbf{A}_\ell) \alpha = \mathbf{D} \gamma \quad (11)$$

で表せる。上式の行列 $\mathbf{D}$ は (n_u, s) 行列で、任意ベクトル γ は

$$\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s\} \quad (12)$$

である。ここに、 γ_i はその任意性から

$$\gamma_i = 1, \quad \gamma_j = 0 \quad (j \neq i) \quad (13)$$

とおき、式(11)に代入すると、1自由度系の独立変位モードベクトル $\mathbf{d}_i$ を得る。この $\mathbf{d}_i$ は、たわみ角法に相応する独立部材角に強制変位を与えたときの1自由度系における各節点の運動を表している。

さらに、特解 $\mathbf{A}_\ell^+ \Delta \mathbf{l}$ を利用するとたわみ角法に部材の伸縮を次のようにして考慮することができる。

$$\Delta \mathbf{l}^T = \{\Delta \ell(1), \Delta \ell(2), \dots, \Delta \ell(m)\} \quad (14)$$

であるから、任意部材 (K) のみ単位の伸び $\Delta \ell(K) = 1$ を与え、他部材の伸び $\Delta \ell(J) = 0 (J \neq K)$ として、 $\mathbf{A}_\ell^+ \Delta \mathbf{l}$ に代入して得られる1自由度系の独立変位モードベクトルを利用する方法である。この方法により、独立部材角(本解析では独立変位モードベクトルを使う)と部材伸縮で記述する変位法に対応する解法を示すことができる。このように、本解析は部材の伸縮を独立量に選ぶこともできるので、部材の伸縮がラーメンの全体的な挙動に与える影響や座屈たわみ角法に部材の伸縮を考慮した解析なども可能となる。

力の釣合式の一般解

たわみ角法は部材の伸縮を無視するので、軸方向力と伸びの関係式(構成式)は使えない。したがって、軸方向力式 $n_{(p)}$ は式(4)の一般解より求める。

式(4)の一般解は次式で与えられる。

$$\mathbf{n} = \mathbf{B}_\ell^+ (\mathbf{f} - \mathbf{B}_r \mathbf{q}) + (\mathbf{I} - \mathbf{B}_\ell^+ \mathbf{B}_\ell) \beta \quad (15)$$

上式右辺第1項は特解であり、外力とせん断力に釣合う軸方向力を表す。右辺第2項は外力とせん断力には無関係であり、安定ラーメンでは自己釣合の応力(軸方向力)を表している(文献12))。今取り扱っている置換トラスは、一般に剛性を欠く不安定トラスであるから、直感的に分かるように自己釣合の応力は存在しない。その数学的な証明は文献15)で示している。

つまり、軸方向力は

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \mathbf{B}_\ell^+ (\mathbf{f} - \mathbf{B}_r \mathbf{q}) \\ &= (\mathbf{A}_\ell^+)^T (\mathbf{f} - \mathbf{B}_r \mathbf{q}) \end{aligned} \quad (16)$$

で求められる。上式右辺における行列の関係は式(5-1)によるものである。

4. 解の存在条件¹⁴⁾がもつ力学的意味

本節では、外力と軸方向力およびせん断力の釣合式(式(4))の解の存在条件(解をもつ必要十分条件)がもつ力学的意味をたわみ角法との対応

において説明する。

式(4)の解の存在条件は、次式で与えられる。

$$(\mathbf{I} - \mathbf{B}_\ell \mathbf{B}_\ell^+)(\mathbf{f} - \mathbf{B}_r \mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (17)$$

上式左辺第1項()内に式(5-1)および一般逆行列の性質 $(\mathbf{A}_\ell^T)^+ = (\mathbf{A}_\ell^+)^T$ を用いると係数行列 $(\mathbf{I} - \mathbf{B}_\ell \mathbf{B}_\ell^+)$ は、

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} - \mathbf{B}_\ell \mathbf{B}_\ell^+) &= (\mathbf{I} - \mathbf{A}_\ell^T (\mathbf{A}_\ell^T)^+)^T \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{A}_\ell^+ \mathbf{A}_\ell)^T \end{aligned} \quad (18)$$

であり上式を式(17)に代入すると

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A}_\ell^+ \mathbf{A}_\ell)^T (\mathbf{f} - \mathbf{B}_r \mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (19)$$

となる。

上式左辺第1項()内の係数行列 $(\mathbf{I} - \mathbf{A}_\ell^+ \mathbf{A}_\ell)$ は、3.1.1 で述べたように s 個の独立変位モードベクトル $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_s$ を表しているから、式(19)は s 個の独立方程式として

$$\mathbf{d}_i^T (\mathbf{f} - \mathbf{B}_r \mathbf{q}) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s) \quad (20)$$

で表せる。 $\mathbf{d}_i$ は式(13)によるものであるから不安定トラスに強制変位 $\gamma_i = 1$, $\gamma_j = 0$ ($j \neq i$) を与えて静止させたとき(一例として図3)の外力とせん断力による(たわみ角法¹⁾)に相応する)節点系の仮想仕事式を表していることが分かる。

本解析の節点方程式は式(3)右辺に構成式(式(6))を代入し、またせん断力方程式は構成式(式(7))を式(20)の左辺に代入して得られる。

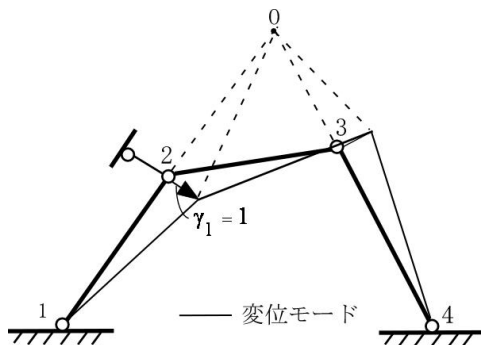


図3 1自由度系の独立変位モードの一例

4. あとがき

以上、本論文では「構造全体の挙動の法則性を掌握することを目的とするたわみ角法研究」¹⁾との対応において、一般逆行列を活用する本解析の力学的意味およびその発展性の一端を示した。

参考文献

- 1) 小野 薫：剛節ラーメンの解法に於ける適合条件について、建築学会大会論文、1934.4
- 2) 齋藤謙次：不規則な剛節ラーメンに対する組織的解法、建築学会大会論文集、1935.4.2
- 3) 二見秀雄：撓角法 小野薫著、建築雑誌、VOL.72、NO.853、p.7、1957
- 4) 鷲尾健三、久恒治郎：たわみ角法の源流、日本建築学会大会学術講演梗概集(東北) pp.1021-1022、1982.10
- 5) 小野 薫：撓角法、紀元社出版、1957
- 6) 小野 薫：質点系の取扱いに基づく振動撓角法、建築学会大会論文集、1936.3
- 7) 日本建築学会編：応用力学シリーズ5 構造形態の解析と創生、培風館、1998.12
- 8) 日本建築学会編：空間構造の数値解析ガイドライン、日本建築学会、2001.5
- 9) 向後豊次、川島 晃：繰返し外力を受ける鋼構造骨組の弾塑性・おたわみ解析、日本建築学会論文報告集、第321号、pp.38-48、1982.11
- 10) 向後豊次、川島 晃：平面骨組の弾塑性・大たわみ撓角法()型に関する研究、日本大学生産工学部報告、第20巻第1号、pp.87-103、1987.6
- 11) 六車 熙、渡辺誠一：プレストレスコンクリート不静定架構のたわみ角法によるクリープ応力解析、日本建築学会構造系論文報告集、No.450、pp.99-108、1993.8
- 12) 川島 晃：変位法および応力法による立体骨組の構造解析に関する研究、日本大学博士論文、2006.3
- 13) 田中 尚、半谷裕彦：不安定トラスの剛体変位と安定化条件、日本建築学会構造系論文報告集、第356号、pp.35-43、1985.10
- 14) 半谷裕彦、川口健一：形態解析(一般逆行列の応用)、培風館、1991
- 15) 花井重孝、川島 晃：トラス構造の応力解析に関する研究(一般逆行列の応用)、日本大学生産工学部報告、第32巻第1号、pp.13-17、1999.6