数学モデルを用いた多自由度マニピュレータの軌道追従に関する検討

日大生産工　○黒岩　孝
日大生産工　　松原　三人

1. はじめに

最近、人間や生物を模した動作が可能な機械に関する研究が活発に行われている[1]。著者らは、これまでの報告[2],[3]で、複数の回転関節を持つ多自由度マニピュレータについて、その先端部分の座標と、各関節の回転角との関係式を用いて、マニピュレータの先端部分を、所望の目標軌道に追従できることを明らかにした。

ここでは、上述のマニピュレータを実際に動作させることを想定して、以下の検討を行う。すなわち、各関節にアクチュエータを配置し、それぞれ同時にトルクを発生させてマニピュレータを駆動した場合について、各関節の回転角と、各アクチュエータのトルクとの関係を表す、その数学モデルを導出する。

2. 解析法

図1に、マニピュレータの概略図を示す。即ち、2つの回転関節R_1, R_2とハンドを持ち、回転関節R_1は胴体に直付けされ、胴体は水平に設置された定盤に固定されている。回転関節R_1及びR_2と、回転関節R_2及び ハンドは、それぞれ2つのリンク(長さをa_2, a_3で表す)により互いに連結している。ここで、回転関節R_1, R_2の回転軸とハンドの中心における座標系は、それぞれ(x_1, y_1, z_1)～(x_3, y_3, z_3)で表す。回転関節R_1は胴体に直付けされているので、胴体の座標系(x_0, y_0, z_0)は(x_1, y_1, z_1)と同じ位置にあり、地面に対してx_0及びz_0は平行な方向、y_0は垂直な方向である。Denavit-Hartenbergの記法[4]により、ハンドの座標を胴体の座標(x_0, y_0, z_0)に変換できるため、目標軌道(x_0, y_0)に対してハンドを追従させるのに必要な回転関節の角度(θ_1, θ_2)を求める事ができる[2]。

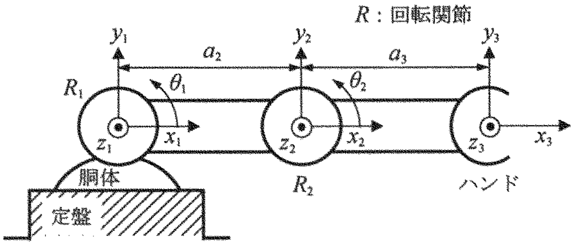

図1　マニピュレータの概略図

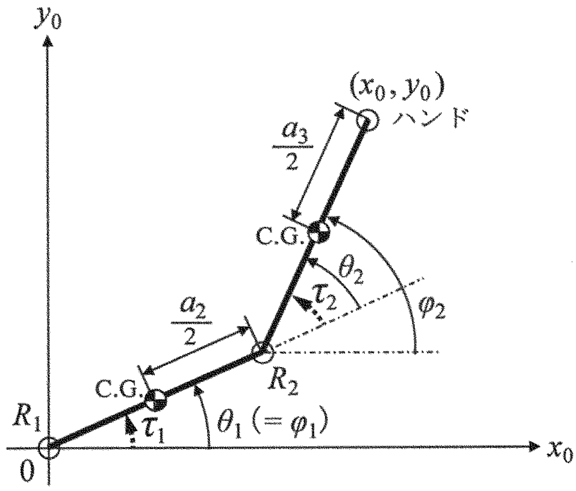

図2　マニピュレータの力学系

一方、図2はマニピュレータの力学系を示す。ここでは2つのリンクの質量を(m_1, m_2)、慣性モーメントを(J_1, J_2)とし、いずれも剛体とみなす。回転関節R_1, R_2の位置にはそれぞれアクチュエータを配置し、(θ_1, θ_2)の方向にトルク(τ_1, τ_2)を発生するものとする。同図中の(φ_1, φ_2)は、座標軸x_0に対する各リンクの角度、C.G.は各 リンクの重心位置を表す。また、$-y_0$の方向に重力が働くものとし、重力加速度をgで表す。マニピュレータは平面上で動作するためCoriolisの力はなく、アクチュエータ駆動時の摩擦力も無視できるとする[5]。

Study on the orbit tracking of the multiple degrees of freedom manipulator by using the mathematical model

Takashi KUROIWA and Mitsuhito MATSUBARA

3. 数学モデルの導出

以下では、エネルギーの釣合いによりマニピュレータの数学モデルを導出する[5],[6]。各リンクにおける重心の座標を$(x_{Gi},\ y_{Gi})$ $(i=1, 2)$とすると、図２に示した力学系の運動エネルギーK及びポテンシャルエネルギーUは次式で表せる。

$$K=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\left\{J_i\dot{\varphi}_i^{\ 2}+m_i\left(\dot{x}_{Gi}^{\ 2}+\dot{y}_{Gi}^{\ 2}\right)\right\} \cdots\cdots (1)$$

$$U=\sum_{i=1}^{2}m_i g y_{Gi} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

よって、アクチュエータのトルクを関数Wで表すと、Lagrangeの運動方程式[7]は次式で表せる。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial K}{\partial\varphi}+\frac{\partial U}{\partial\varphi}=W \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

(3)式に(1), (2)式を代入すると、(φ_1, φ_2)に関する連立微分方程式

$$\begin{bmatrix} A & B\cos(\varphi_2-\varphi_1) \\ B\cos(\varphi_2-\varphi_1) & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2\end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix} 0 & -B\sin(\varphi_2-\varphi_1) \\ B\sin(\varphi_2-\varphi_1) & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\varphi}_1^{\ 2} \\ \dot{\varphi}_2^{\ 2}\end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix} d_1\cos\varphi_1 \\ d_2\cos\varphi_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tau_1-\tau_2 \\ \tau_2\end{bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

を得る。ただし、式中のA, B, C, d_1, d_2は、それぞれ以下の様な定数を表す。

$$A=J_1+m_1\left(\frac{a_2}{2}\right)^2+a_2^{\ 2}m_2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

$$B=a_2m_2\left(\frac{a_3}{2}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

$$C=J_2+m_2\left(\frac{a_3}{2}\right)^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

$$d_1=\left(m_1\frac{a_2}{2}+m_2a_2\right)g \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

$$d_2=m_2\left(\frac{a_3}{2}\right)g \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

ここで、$\theta_1=\varphi_1$、$\theta_1+\theta_2=\varphi_2$であるから、(4)式は以下のように書き直すことができる。

$$\begin{bmatrix} A+2B\cos\theta_2+C & B\cos\theta_2+C \\ B\cos\theta_2+C & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2\end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix} -B\left(2\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)\dot{\theta}_2\sin\theta_2 \\ B\dot{\theta}_1^{\ 2}\sin\theta_2 \end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix} d_1\cos\theta_1+d_2\cos(\theta_1+\theta_2) \\ d_2\cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\tau_1 \\ \tau_2\end{bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

式(10)が各関節の回転角(θ_1, θ_2)と、各アクチュエータのトルク(τ_1, τ_2)との関係を表す数学モデルである。

なお、式(10)は、非線形連立微分方程式の形をしているため、このままでは線形制御理論[8]の適用が困難である。これに関する検討は今後の課題である。

4. まとめ

回転関節を持つ２自由度マニピュレータについて、各関節の回転角と、各アクチュエータのトルクとの関係を表す数学モデルを導出した。式(10)の数値解については、講演時に報告する予定である。

参考文献

[1] 日本機械学会編：生物型システムのダイナミックスと制御，養賢堂(2002)

[2] 黒岩，松原:第 38 回日大生産工学術講演会要旨集，2-18，pp. 63-64 (2005)

[3] 黒岩，松原:第 39 回日大生産工学術講演会要旨集，2-9，pp. 29-30 (2006)

[4] J.Denavit et al.:J.of Appl. Mech., ASME, pp.215-221(1955)

[5] 古田他：メカニカルシステム制御，オーム社 (1984)

[6] 広瀬:ロボット工学，裳華房(1987)

[7] 長尾他：工業力学，理工学社 (1988)

[8] 例えばJ.L.Melsa et al.:Linear Control Systems, McGraw-Hill (1969)など