複素応力関数のTaylor展開

日大生産工　〇渡里　望

２次元弾性体の応力の性質を表す関数として複素応力関数（Goursatの応力関数）が知られている[1)]。本講演では変位ついては、横方向u、縦方向vがy軸についてそれぞれ顕著な逆対称性、対称性をもった場合について考える（図1）。具体的には$x=a$上、すなわち弾性体の側辺にそって変位拘束の状態にあって、x軸上では自由縁の状態（応力自由）である場合である。このような場合に角点C周辺を除く自由縁（x軸上）上では複素応力関数は正則であると考えられる。したがって、この関数は原点まわりでTaylor級数に展開されるはずである[2)]。

2 境界条件

$$u=0, \qquad v=0 \qquad x=a\text{上} \tag{1}$$

$$\sigma_{yx}=0, \qquad \sigma_{yy}=0 \qquad x\text{軸上} \tag{2}$$

３ Goursatの複素応力関数

Goursatの関数を用いると応力と変位は次式のような関係式が成立している。

$$\sigma_{xx}+\sigma_{yy}=2(\varphi'(z)+\overline{\varphi'(z)}) \tag{3}$$

$$\sigma_{yy}-\sigma_{xx}+2i\sigma_{xy}=2(\bar{z}\varphi''(z)+\psi'(z)) \tag{4}$$

$$\sigma_{xx}+\sigma_{yy}=2(\varphi'(z)+\overline{\varphi'(z)}) \tag{5}$$

$$\omega=u+iv=c_w\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)} \tag{6}$$

$$c_w=\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu} \tag{7}$$

4 鏡映対称変位

考察している応力問題ではy軸に関して顕著な対称性がある場合を取り扱う。すなわち、y軸に関して横方向uは逆対称、縦方向vは対称という性質をもっている。そこでy軸に関する鏡映操作を記号Mを用いて次式のように表すことにする。

$$Mx=-x, \qquad My=y \tag{8}$$

変位については

$$Mu=-u, \qquad Mv=v \tag{9}$$

と表すことができる。ここで $Mu,\ Mv$ とは

$$Mu(x,\ y)=u(-x,y) \tag{10}$$

$$Mv(x,\ y)=v(-x,y) \tag{11}$$

であって(8)から、

$$Mu(x,\ y)=u(Mx,\ My) \tag{12}$$

$$Mv(x,\ y)=v(Mx,\ My) \tag{13}$$

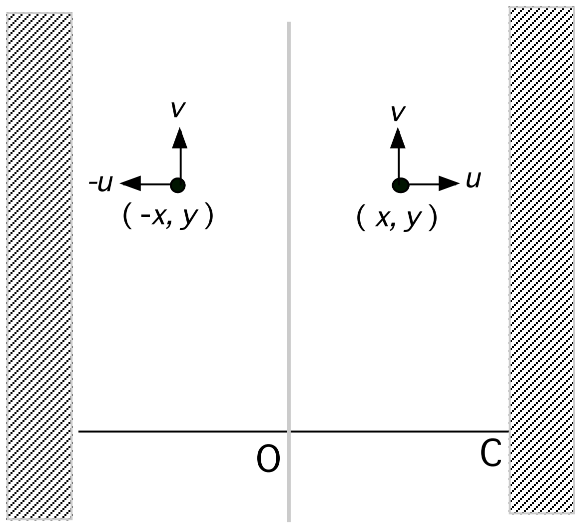

図1　鏡映対称

Taylor's Expansion of Complex Stress Functions

Nozomu　WATARI

が成立する。したがって(9)は(10)と(11)から

$$u(-x,\ y) = -u(x,\ y) \tag{14}$$

$$v(-x,\ y) = v(x,\ y) \tag{15}$$

である（図１）。 以上により鏡映操作Mについて次式が成立する。

$$Mu(x,\ y) = u(Mx,\ My) = -u(x,\ y) \tag{16}$$

$$Mv(x,\ y) = v(Mx,\ My) = v(x,\ y) \tag{17}$$

また、複素数平面での変数では

$$Mz = -\bar{z} \qquad M\bar{z} = -z \tag{18}$$

$$z = x + iy\ ,\ \ \bar{z} = x - iy$$

が成立する。

4.　ベキ級数表示について

Goursatの複素応力関数のTaylor展開についてベキ級数表示への準備として次のような関数を考える。

$$f(z,\ \bar{z}) = z^p \bullet \bar{z}^q \quad (p,\ q\text{は整数}) \tag{19}$$

f に鏡映操作 M をおこなうと、(18)を用いて

$$Mf(z,\ \bar{z}) = f(Mz,\ M\bar{z}) = (-\bar{z})^p(-z)^q \tag{20}$$

したがって、

$$Mf(z,\ \bar{z}) = (-1)^n \bar{z}^p z^q \tag{21}$$

ただし、　$n=p+q$

(21)は

$$Mf = (-1)^n \bar{f} \quad (\ \bar{f} = \overline{f(z,\ \bar{z})}\ ) \tag{22}$$

とかける。

次に、関数 g を

$$g(z,\ \bar{z}) = \alpha_n f(z,\ \bar{z}) \tag{23}$$

とおく。ここで、α_n は複素定数。

この関数の鏡映は(21)から、

$$Mg(z,\ \bar{z}) = \alpha_n Mf(z,\ \bar{z}) = (-1)^n \alpha_n \bar{z}^p z^q \tag{24}$$

となる。

今、関数 g が 次の性質をもつものとする。

$$Mg = -\bar{g} \tag{25}$$

$$\bar{g} = \overline{\alpha_n f(z,\ \bar{z})} = \overline{\alpha_n}\,\overline{f(z,\ \bar{z})} = \overline{\alpha_n} \cdot \bar{z}^p z^q \tag{26}$$

であるから、性質(25)が成立するときは(24)と比較すれば、

$$(-1)^n \alpha_n = -\overline{\alpha_n} \tag{27}$$

あるいは

$$\overline{\alpha_n} = (-1)^{n+1} \alpha_n \tag{28}$$

という関係が得られる。したがって、(25)が成立するときは

nが偶数のときは　　$\alpha_n = ia_n$　(29)

（純虚数、 a_n は実数）

nが奇数のときは　　$\alpha_n = a_n$　(30)

である。

5.　変位の鏡映について

２次元弾性での変位はGoursatの複素応力関数を用いて式(6)で表される。 $\omega = u + iv$ の鏡映操作は、

$$M\omega = M(u + iv) = Mu + iMv$$

であり、(16)と(17)から

$$M\omega = -u + iv$$

となり、 $M\omega = -\bar{\omega}$　(31)

が得られる。(31)は性質(25)の関係式である。

6.　Taylor展開

以上の準備から変位 $\omega = u + iv$ についての原点まわりのTaylor展開（ベキ級数）の導出について報告する。

参考文献

1)岡村　弘之　　線形破壊力学（培風館）

2)森口 繁一　　２次元弾性論（岩波書店）