ニューラルネットワークによる数独の解法

日大生産工(学部)　○大谷 哲広
日大生産工　松田 聖

1　はじめに

組合せ最適化問題とは、問題の規模に応じて急激に増大する組合せの中から最適な解を求めるものである。これまでに、ニューラルネットワーク・ホップフィールドを用いた組合せ最適化問題を解く研究が多数行われてきた。本論文では、最近流行の数独を組合せ最適化問題としてとらえ、ホップフィールドネットワークで解くことを試みる。

2　ニューラルネットワーク

人間の脳にはニューロンと呼ばれる140億個の神経細胞が存在する。その神経細胞は互いに結合し情報を交換し合い、人間の記憶や判断などの精神活動を行っている。このような脳の情報処理機構を、神経細胞の働きを模擬したニューロンに多数配置することによってコンピュータ上で行おうとするのがニューラルネットワークである。

3　ホップフィールド

ホップフィールドネットワーク(Hopfield network)は、ニューラルネットワークの一モデルである。ネットワークの更新方法として、同期的更新と非同期的更新の２種類が存在する。また、自然な操作によってネットワークのエネルギーが極小値をとる。

ホップフィールドネットワークの特徴を挙げる。結合荷重の値は対称である。(ニューロンi、jにおいて、iからj、jからiへの結合荷重が等しい）ネットワークにエネルギー関数を導入している(図.1参照)。図.1では、状態変化を繰り返しながらエネルギーを小さくしていく。このネットワークで、全てのニューロン値は連続値をとり、出力は、全てのニューロンの状態の集合である。エネルギー関数を用いて、ネットワークの状態をもとに、エネルギーを計算し、これが最小になるようにネットワークの状態が変化し安定したときが、ネットワークの出力となる。

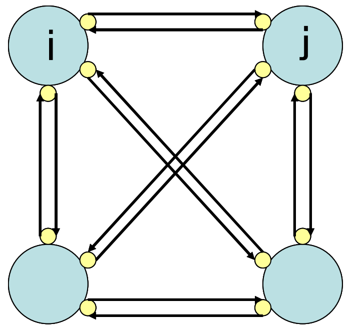

図. 1

ホップフィールドの説明としてネットワークに対してあるエネルギー関数を定義し、ネットワークのダイナミクスがこの関数を常に減少させる方向へ動作することを上記で示した。これにより、エネルギー関数を最適化問題に対して合目的的に決定することによって、回路が定常状態に到達した点が関数、つまり、最適化問題の極小解あるいは最小解となることを利用できる。

最適化問題への応用として、ホップフィールドのエネルギーがどのように極小値をとるのかを次の式で説明する。

・収束するまで繰り返す。

W_{ij}, x_j, f は、結合荷重、ニューロン出力、シグモイド関数を表す。自分以外のニューロンからの入力を得て、平衡状態に到達するまで動作させる。

$$x_i(t+1) = f\left[\sum_{j=0}^{n-1} W_{ij} x_j(t)\right]$$

$$(0 \le i \le n-1)$$

なお、エネルギーは以下のように記される。

Solving Sudoku by Neural-Network

Akihiro OHTANI and Satoshi MATSUDA

$$E=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}W_{ij}x_i x_j+\sum_{i=1}^{n}\theta_i x_i$$

このようにして、ネットワークエネルギーが極小値に安定するまで状態変化を繰り返す。

4　数独

数独とはナンバープレイスとも呼ばれ、数字を使ったパズルである。以下にルールと問題例、解答例を記す。

ルール
1. 縦の9列、横の9行のそれぞれの列に、1～9までの数字が一つずつ入る。
2. 太い線で囲まれた3×3マスの9個のブロックの中にも、1～9までの数字が一つずつ入る。

問題例

	9			1			2	7
		7	4		6			1
1		5	7	2		6	4	
			1		8	3		4
4	8							
			6		5	8		2
7		9	2	8		1	6	
		8	5		1			9
	1			3			8	5

⇒

解答例

6	9	4	8	1	3	5	2	7
8	2	7	4	5	6	9	3	1
1	3	5	7	2	9	6	4	8
5	6	2	1	7	8	3	9	4
4	8	1	3	9	2	7	5	6
9	7	3	6	4	5	8	1	2
7	5	9	2	8	4	1	6	3
3	4	8	5	6	1	2	7	9
2	1	6	9	3	7	4	8	5

5　エネルギー関数

数独に、ニューラルネットワーク・ホップフィールドを適応させるため、数独のルールをもとにエネルギー関数を構成する。
ルールを満たすために、高さごとに1～9までのニューロンを分けて考える。つまり高さ1には1 を出力するニューロンのみが入り、高さ2には2 を出力するニューロンのみが入る。それらの条件を含んで縦、横、高さに9個のニューロンがあるネットワークを考えると、図.2のような形になる。図.3は、高さ1と2に当てはまるニューロンの例である。

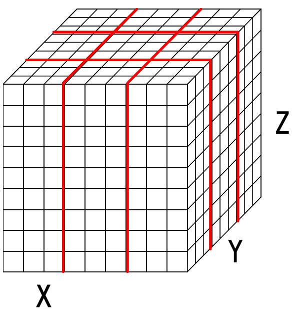

図.2

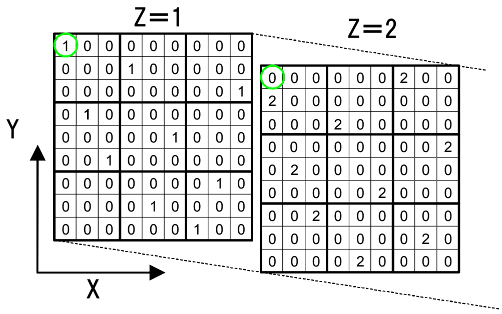

図.3

・各、横Xに１つだけ発火したニューロンが存在する。

$$\sum_{Y}\left(\sum_{Z}\left(\sum_{X}\chi_{YZX}-1\right)^2\right)=0$$

・各、縦Yに１つだけ発火したニューロンが存在する。

$$\sum_{X}\left(\sum_{Z}\left(\sum_{Y}\chi_{XZY}-1\right)^2\right)=0$$

・各、高さZに１つだけ発火したニューロンが存在する。

$$\sum_{X}\left(\sum_{Y}\left(\sum_{Z}\chi_{XYZ}-1\right)^2\right)=0$$

・3×3×9 の中に発火したニューロンが、高さ毎に存在する。

$$\sum_{Z=1}^{9}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{y=i}^{i+3}\sum_{X=j}^{j+3}x_{ZYX}-1\right)^2=0$$

上記の制約式をもとにエネルギー関数を作成すると次式のようになる

$$\begin{aligned}E=&\sum_{Y}\left(\sum_{Z}\left(\sum_{X}x_{YZX}-1\right)^2\right)+\sum_{X}\left(\sum_{Z}\left(\sum_{Y}x_{XZY}-1\right)^2\right)+\sum_{X}\left(\sum_{Y}\left(\sum_{Z}x_{XYZ}-1\right)^2\right)+\sum_{Z=1}^{9}\left(\sum_{Y=1}^{3}\sum_{X=1}^{3}x_{ZYX}-1\right)^2\\&+\sum_{Z=1}^{9}\left(\sum_{Y=1}^{3}\sum_{X=4}^{6}x_{ZYX}-1\right)^2+\sum_{Z=1}^{9}\left(\sum_{Y=1}^{3}\sum_{X=7}^{9}x_{ZYX}-1\right)^2+\sum_{Z=1}^{9}\left(\sum_{Y=4}^{6}\sum_{X=1}^{3}x_{ZYX}-1\right)^2+\sum_{Z=1}^{9}\left(\sum_{Y=4}^{6}\sum_{X=4}^{6}x_{ZYX}-1\right)^2\\&+\sum_{Z=1}^{9}\left(\sum_{Y=4}^{6}\sum_{X=7}^{9}x_{ZYX}-1\right)^2+\sum_{Z=1}^{9}\left(\sum_{Y=7}^{9}\sum_{X=1}^{3}x_{ZYX}-1\right)^2+\sum_{Z=1}^{9}\left(\sum_{Y=7}^{9}\sum_{X=4}^{6}x_{ZYX}-1\right)^2+\sum_{Z=1}^{9}\left(\sum_{Y=7}^{9}\sum_{X=7}^{9}x_{ZYX}-1\right)^2\end{aligned}$$

5　おわりに

今後、ニューラルネットワーク・ホップフィールドモデルによる数独解法の検証を行う。課題として、ニューロン数の減少や、ホップフィールドモデルの問題点である、局所最小解に陥る危険回避の方法探索の必要が挙げられる。局所最小解に陥る危険回避の方法には、カオスニューラルネットワークを用いることで問題回避ができることが期待されている。今後、カオスニューラルネットを用いた研究を進めていきたい。