

# 離散評点 CCR モデルの図的解釈

日大生産工（院） 大久保 智弘  
日大生産工 大澤 慶吉

日大生産工（院） 金子 隆史  
日大生産工 篠原 正明

## 1. はじめに

近年、事業体など DMU(Decision Making Unit：意思決定主体)の効率性を相対的に評価する手法として、DEA(Data Envelopment Analysis：包絡分析法)が注目されるようになった。離散評点 CCR モデルでは、Excel を用い、評価ベクトル  $v, u$  を離散的に動かすことにより相対効率値を最適化する。

本研究では、Excel を用いた離散評点 CCR モデルの計算結果に対して、手計算による図的解釈を試みた。

## 2. CCR モデルの LP 定式化

$n$ 個の活動それぞれについて比率尺度で効率性を測定していくが、対象になっている活動を代表的に記号  $o$  とし  $DMU_o$  と書くことにする。以下、記号  $o$  は  $1, 2, \dots, n$  のどれかを指すものとする。入力につけるウェイトを  $v_i (i=1, \dots, m)$ 、出力につけるウェイトを  $u_r (r=1, \dots, s)$  とし、その値を次の分数計画問題を解くことによって定める。

<  $FP_o$  > 目的関数

$$\max \theta = \frac{u_1 y_{1o} + u_2 y_{2o} + \dots + u_s y_{so}}{v_1 x_{1o} + v_2 x_{2o} + \dots + v_m x_{mo}} \quad (1)$$

制約式

$$\frac{u_1 y_{1j} + \dots + u_s y_{sj}}{v_1 x_{1j} + \dots + v_m x_{mj}} \leq 1 \quad (j=1, \dots, n) \quad (2)$$

$$v_1, v_2, \dots, v_m \geq 0 \quad (3)$$

$$u_1, u_2, \dots, u_s \geq 0 \quad (4)$$

この制約式の意味は、ウェイト  $v_i, u_r$  による仮想的入力と出力の比をすべての活動について 1 以下に抑えるということである。その上で、当核の活動の比率尺度  $\theta$  を最大化するように、 $v_i, u_r$  を決める。したがって、最適な  $\theta$  の値  $\theta^*$  は高々 1 である。

上の分数計画に対し次の線形計画 (Linear Programming：以下 LP と略す) を考える。

<  $LP_o$  > 目的関数

$$\max \theta = u_1 y_{1o} + \dots + u_s y_{so} \quad (5)$$

制約式

$$v_1 x_{1o} + \dots + v_m x_{mo} = 1 \quad (6)$$

$$u_1 y_{1j} + \dots + u_s y_{sj} \leq v_1 x_{1j} + \dots + v_m x_{mj} \quad (7)$$

$$(j=1, \dots, n)$$

$$v_1, v_2, \dots, v_m \geq 0 \quad (8)$$

$$u_1, u_2, \dots, u_s \geq 0 \quad (9)$$

分数計画問題 <  $FP_o$  > と線形計画問題 <  $LP_o$  > は同値である。

### 3. 1入力2出力

#### 3.1 解析内容

まず初めに、1入力2出力のCCRモデルについて、手計算による図的解釈を試みた。1入力2出力の例として、7支店の営業マン1人当たりの取引先数(単位：10)と売上高(単位：千万円)を表1に表す。

表1 1入力2出力

支店	A	B	C	D	E	F	G
営業人数 $x$	1	1	1	1	1	1	1
取引先数 $y_1$	1	2	3	4	4	5	6
売上 $y_2$	5	7	4	3	6	5	2

このデータの出力の各行の総和を1として正規化し、表2のようにする。

表2 1入力2出力(正規表現)

支店	A	B	C	D
営業人数 $x$	1	1	1	1
取引先数 $y_1$	0.04	0.08	0.12	0.16
売上 $y_2$	0.15625	0.21875	0.125	0.09375

E	F	G
1	1	1
0.16	0.2	0.24
0.1875	0.15625	0.0625

次に、表2の出力データを基に図1を作成する。LPによるフロンティア面を破線で、3段階評点のウェイト{0, 1, 2}のフロンティア面を実線で図1に示す。

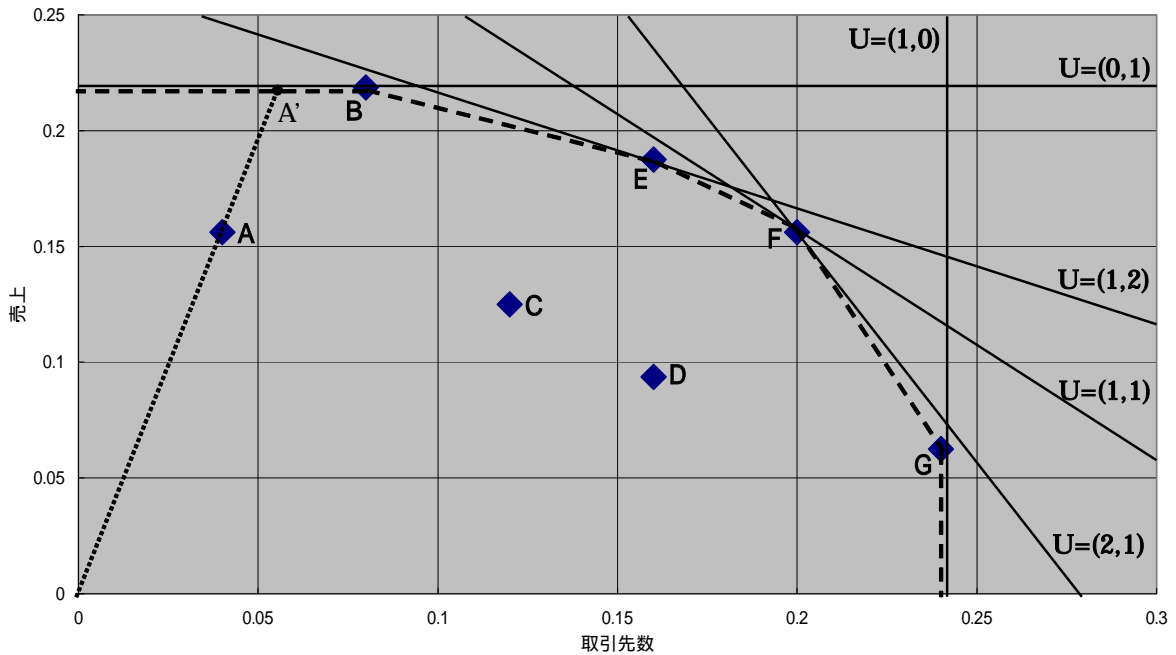


図1 1入力2出力(正規表現)

#### 3.2 解析方法

原点から点Aを通りフロンティア面にぶつかる直線を引く。フロンティア面とぶつかった点をA'とする(図1参照)。点B、点C、点D、点E、点F、点Gについても、点Aと同じように直線を引き交点を求める。

次に効率値を求める。効率値の求め方は、原

点Oから点Aまでの直線OAの長さを測る。同じように、原点Oから点A'までの直線OA'の長さを測る。そして、直線OAを直線OA'で割る。この計算を式に表すと、

$$\text{効率値} = \frac{OA}{OA'} \quad (10)$$

となる。この計算を点 A、点 B、点 C、点 D、点 E、点 F、点 G について行い、それぞれの効率値を求める。

このデータの入力の各行の総和を 1 として正規化し、表 4 のようにする。

#### 4. 2 入力 1 出力

##### 4.1 解析内容

次に、2 入力 1 出力の CCR モデルについて、手計算による図的解釈を試みた。2 入力 1 出力の例として、9 支店のスーパーマーケットの例を示す。入力 1 は従業員数(単位：10 人)、入力 2 は売り場面積(単位：千平方メートル)、出力は売上(単位：億円)である。ただし、売上はすべて 1 億円に換算している。つまり、1 億円の売上を出すための従業員数と売り場面積であるとする。そのデータを表 3 に表す。

表 4 2 入力 1 出力(正規表現)

店	A	B	C
従業員数 $x_1$	0.084210526	0.147368421	0.168421053
売場面積 $x_2$	0.125	0.125	0.041666667
売上 $y$	1	1	1

D	E	F
0.084210526	0.042105263	0.105263158
0.083333333	0.166666667	0.083333333
1	1	1

G	H	I
0.126315789	0.115789474	0.126315789
0.166666667	0.104166667	0.104166667
1	1	1

次に、表 4 の入力データを基に図 2 を作成する。LP によるフロンティア面を破線で、3 段階評点のウェイト{0, 1, 2}のフロンティア面を実線で図 2 に示す。

表 3 2 入力 1 出力

店	A	B	C	D	E	F	G	H	I
従業員数 $x_1$	4	7	8	4	2	5	6	5.5	6
売場面積 $x_2$	3	3	1	2	4	2	4	2.5	2.5
売上 $y$	1	1	1	1	1	1	1	1	1

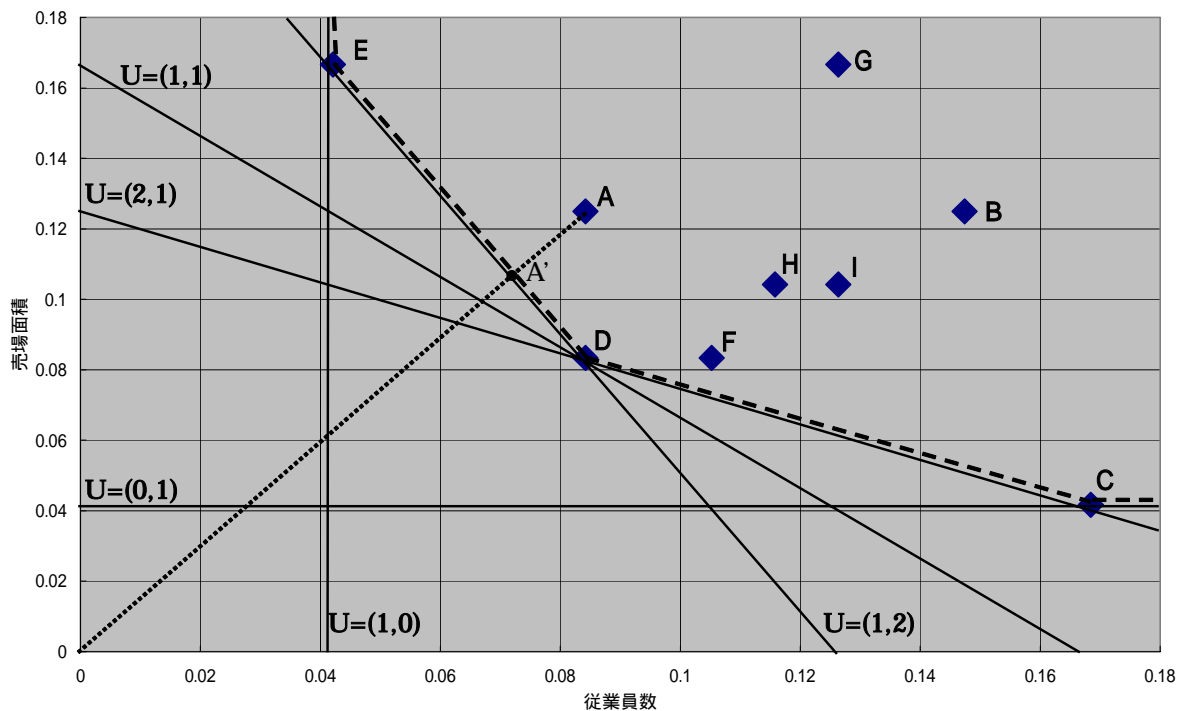


図 2 2 入力 1 出力(正規表現)

## 4.2 解析方法

2入力1出力の場合は、原点から点Aを結ぶ直線を引く。そして、1入力2出力と同じようにフロンティア面とぶつかった点をA'とする(図2参照)。点B、点C、点D、点E、点F、点G、点H、点Iについても、点Aと同じように直線を引き交点を求める。

効率値の求め方は、原点Oから点Aまでの直線OAの長さを測る。同じように、原点Oから点A'までの直線OA'の長さを測る。そして、直線OA'を直線OAで割る。この計算を式に表すと、

$$\text{効率値} = \frac{OA'}{OA} \quad (11)$$

となる。この計算を点A、点B、点C、点D、点E、点F、点G、点H、点Iについて行い、それぞれの効率値を求める。

## 5. 解析結果

1入力2出力・2入力1出力に対する解析結果を表5・表6に記す。

表5 1入力2出力の効率値

DMU	A	B	C	D
図的解釈	0.7217	1	0.6918	0.7514
LPソフト	0.7143	1	0.7	0.75
離散評点	0.7217	1	0.7024	0.7514

E	F	G
1	1	1
1	1	1
1	1	1

表6 2入力1出力の効率値

DMU	A	B	C
図的解釈	0.854	0.6311	1
LPソフト	0.8571	0.6316	1
離散評点	0.8561	0.6332	1

D	E	F
1	1	0.9241
1	1	0.9231
1	1	0.9241

G	H	I
0.599	0.7744	0.7586
0.6	0.7742	0.75
0.6032	0.7785	0.7586

ここで、図的解釈と離散評点 CCR モデルの効率値は計算誤差内で等しい。また、LP 解は計算誤差を考慮して、他の2つより大きい効率値が確認できる。

## 6. おわりに

離散評点 CCR モデルにおいて、LP によるフロンティア面は、離散評点集合を{0, 1, 2, 3, ...}と自然数に拡張したケースである。又、{0, 1, 2}とした場合、1入力2出力あるいは2入力1出力では、

$$s_1u_1 + s_2u_2 = \text{const} \quad (12)$$

$$t_1v_1 + t_2v_2 = \text{const} \quad (13)$$

の等高線で変数 $u_1, u_2, v_1, v_2$ の係数 $s_1, s_2, t_1, t_2$ を{0, 1, 2}に限定した包絡線群からフロンティア面が構成されることを、図的解釈、LP ソフト、Excel 表計算の結果より確認した。

## 参考文献

- [1] 刀根薫, 経営効率性の測定と改善 包絡分析法 DEA による, 日科技連(1993)
- [2] 伊藤圭一, 離散評点 DEA の表計算, 日本大学生産工数理情報工学科, 平成 17 年度卒業論文(2006.3)
- [3] 金子隆史, 大久保智弘, 篠原正明, 大澤慶吉, 離散評点 CCR モデルの試み, 第 39 回日本大学生産工数理情報部会学術講演論文集(2006.12)
- [4] 篠原正明, 篠原健, 離散評点 DEA のすすめ, 日本オペレーションズ・リサーチ学会, 春季研究発表アブストラクト集, 2-C-7, pp.148-149