モード削除法を適用した無条件安定と等価な陽的数値積分法

―コンピュータグラフィックスにおけるバネ‐質点モデルへの適応―

日大生産工(院)　○小林 輝　　谷脇 紗和
日大生産工　　吉田 典正　　神田 亮

1.　はじめに

近年, コンピュータの処理能力の向上に伴い, 複雑なシミュレーションをリアルタイムで行うことが可能になってきている. コンピュータグラフィックスにおいても，布[1][4][5]，物体破壊[2]などの様々なシミュレーションが行われている．図 1 に 2005 年度の学術講演会で発表した内容[3]に，基づき作成したシミュレーションの画像を示す.

これらのシミュレーションでは，通常，バネ‐質点モデルと Euler 法や Runge-Kutta 法に代表される陽的数値積分法が用いられるが, バネ係数，ダンピング係数，タイムステップなどのパラメータ値によっては, シミュレーションが振動したり(図 2), 発散したり(図 3)する問題がある.

振動解析の分野では, より安定な振動シミュレーションを行うために，モード解析[6][7]を適用した手法が用いられる．本研究では，コンピュータグラフィックスにおける無条件安定なシミュレーションを目指し, モード解析の手法を, バネ‐質点モデルのシミュレーションに適応するアルゴリズムを提案し, その精度の検証を行う．本研究を進展させることにより，コンピュータグラフィックスの様々なシミュレーションが無条件安定と等価な安定性を達成

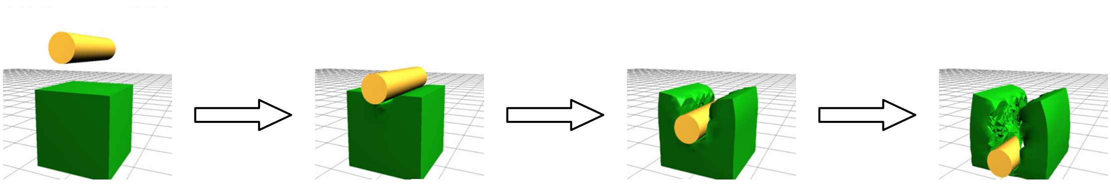

図 1　物体破壊

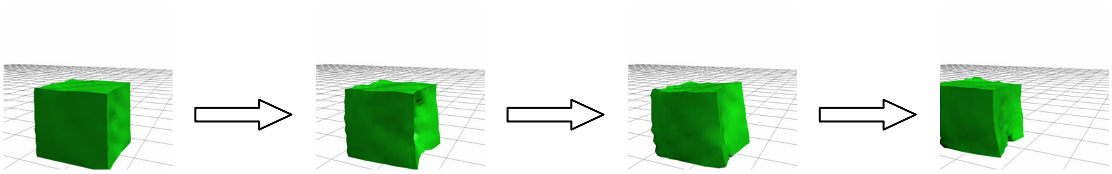

図 2　振動の様子

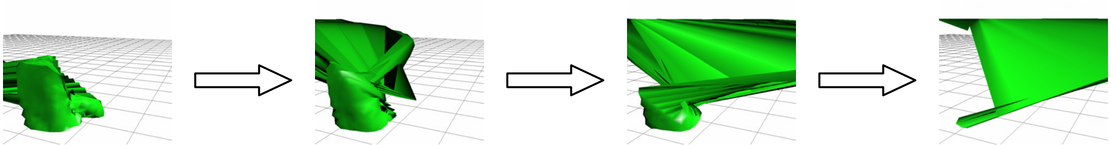

図 3　発散の様子

Explicit Numerical Integration Scheme
Equivalent to Unconditional Stability Based on Modal Truncation Method
‐ Application to a Mass-Spring Model in Computer Graphics ‐

Hikaru KOBAYASHI, Sawa TANIWAKI, Norimasa YOSHIDA and Makoto KANDA

することが期待される.

2.　モード削除法を利用したアルゴリズム

モード削除法とは, 固有モードの直交性を利用して, 現象に支配的でないモード成分を削除し, 現象に支配的なモード成分のみを計算することで, 合理的にシミュレーションを実施しようとするものである.

しかしながら, 本研究で考えられるようなシミュレーションでは, 復元力が幾何学的な非線形に基づいたバネ系により求まるため, 一般化座標系において計算することができない. そこで，本研究では，位置の情報を物理座標系に変換し, 物理座標系で力のベクトルとして計算し, その結果を一般化座標系に変換する手法を提案する. この考え方を陽な積分法に適用すれば, 現象にはほとんど含まれないが, 解の安定性に厳しい条件を付加する高次モードを削除できることになり, 積分時間刻みの算定においても, その合理性を発揮することができる.

3.　シミュレーション概要

2 章で示したアルゴリズムの有効性を検証するため, ここではもっとも単純な多自由度系モデルとして 2 質点 2 自由度モデルを用いる. そのモデルを図 4 に示す.

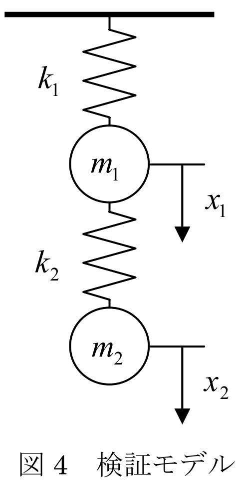

図 4　検証モデル

このモデルの振動方程式は次式で表される.

$$[m]\{\ddot{x}\}[c]\{\dot{x}\}+\{f\}=\{f_g\} \tag{3.1}$$

ここに$[m]$, $[c]$は質量, 減衰マトリックス, $\{f\}$は復元力ベクトル，$\{f_g\}$は重力によって生じる外力ベクトル，$\{\ddot{x}\}$，$\{\dot{x}\}$は加速度，速度ベクトルである．今，この振動系を任意の剛性マトリックス$[k]$に対し, 次式を解くことにより, 固有値，固有ベクトルが求められる.

$$\left([k]-\omega^2[m]\right)\{\phi\}=\{0\} \tag{3.2}$$

ここにωは固有値，$\{\phi\}$は固有ベクトルである. $\{0\}$はすべての要素がゼロのベクトルである. 固有ベクトルで定められる, 一般化座標系上の変位応答をXとすると，$[k]$，$[m]$を定めている座標系（以下物理座標系）の変位応答xによってXは次式のように表される.

$$\{x\}=\sum_{i=1}^{L}\{\phi_i\}X_i \tag{3.3}$$

ここに，下付き添え字iはモード次数，Lは自由度数を表す. 同様な式が一般化座標系上の速度, 加速度応答，$\dot{X}$，$\ddot{X}$についても成り立つ. また, 一般化座標系上の応答X_iはxを用いて, 次式のように表される.

$$X_i=\frac{\{\phi_i\}^{\mathrm{T}}[m]\{x\}}{\{\phi_i\}^{\mathrm{T}}[m]\{\phi_i\}} \tag{3.4}$$

ここに上付き添え字 T は転置を表す．加速度, 速度においても, 上式と同様な変換が成り立つ. 式(3.1)の両辺に，左から$\{\phi_i\}^{\mathrm{T}}$を乗じ，さらに式(3.3)を代入すると，L個の独立した方程式が得られる.

$$M_i\ddot{X}_i+C_i\dot{X}_i+F_i=F_{g_i} \tag{3.5}$$

ただし,

$$M_i=\{\phi_i\}^{\mathrm{T}}[m]\{\phi_i\},\quad C_i=\{\phi_i\}^{\mathrm{T}}[c]\{\phi_i\}$$

$$F_i = \{\phi_i\}^{\mathrm{T}}\{f_i\},\quad F_{g_i} = \{\phi_i\}^{\mathrm{T}}\{f_g\}$$

である．式(3.5)が離散化時間上でも成り立つとし，陽な Newmark β 法で解くと，離散化時間上のステップ $n+1$ での応答 $\ddot{X}_{i,n+1}$， $\dot{X}_{i,n+1}$，$X_{i,n+1}$ は $\ddot{X}_{i,n}$， $\dot{X}_{i,n}$， $X_{i,n}$ を用いて式(3.6)～(3.8)で表される．

$$\ddot{X}_{i,n+1} = M_i^{-1}F_{i,n+1} - M_i^{-1}C_i\dot{X}_{i,n+1} + F_{g_i} \qquad (3.6)$$

$$\dot{X}_{i,n+1} = \dot{X}_{i,n} + \frac{1}{2}\left(\ddot{X}_{i,n} + \ddot{X}_{i,n+1}\right)\Delta t \qquad (3.7)$$

$$X_{i,n+1} = X_{i,n} + \dot{X}_{i,n}\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{X}_{i,n}\Delta t^2 \qquad (3.8)$$

式(3.1)～(3.8)，及び後に述べる式(3.9)を用いた計算アルゴリズムを図 5 に示す．

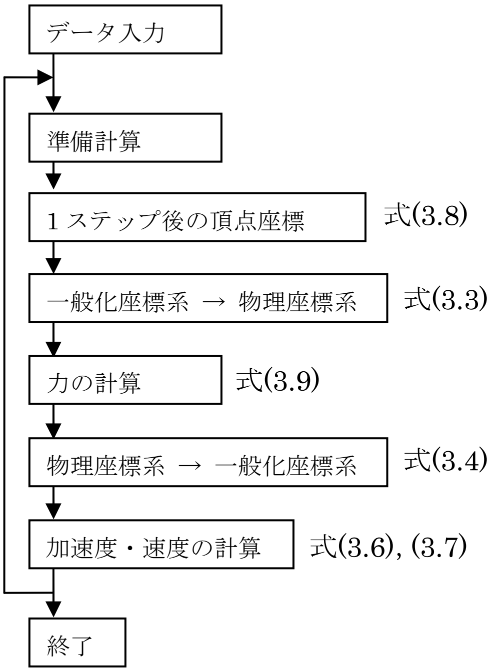

図 5　計算アルゴリズム

図 5 において式(3.3)を適用する場合， $L = L'$（L' は現象についての支配的な最高次のモード次数）とすれば，モードの削除が行える．なお，本研究では，2 章で述べた理由や，応答が基の振動系に対して無視できないほどの変形が生じるなどの理由から式(3.1)の $\{f\}$ は，式(3.9)を用いて求めた．

$$f_i = \sum_j k\frac{x_j - x_i}{\left|x_j - x_i\right|}\left(\left|x_j - x_i\right| - l_{ij}\right) \qquad (3.9)$$

ここに k はバネ係数，l_{ij} はバネの自然長である．また，本研究ではモード削除法を Newmark β 法に適用した場合と，適用なかった場合との比較を行う．両手法のダンピング係数を等価に設定するために式(3.10)を用いて，物理座標系におけるダンピングを設定する．

$$[c] = \{\phi\}^{\mathrm{T}^{-1}}[C]\{\phi\}^{-1} \qquad (3.10)$$

ただし，$[C]$ は

$$C_i = 2h_i\omega_i M_i$$

を対角項とする一般化座標系上のダンピングマトリックスである．ここに，h_i は i 次モードの減衰定数である．

4.　実行結果

ここでは，図 4 のモデルを用いてモード削除法を Newmark β 法に適用した場合と，適用しなかった場合のシミュレーション結果を示す．また，モード削除法を適用した場合と，適用しなかった場合と共に，パラメータを表 1 のように設定した．その結果を図 6 に示す．左が物理座標計算のみの場合，右が本研究を用いた場合である．このシミュレーションにおいて 100 ステップ進めた後の両手法の誤差は，変位 x_1 では 7.29762×10^{-9} ，変位 x_2 では 7.29683×10^{9} である．また，1000 ステップでの変位 x_1 では 5.21981×10^{7} ，変位 x_2 では 5.82287×10^{7} である．このことからシミュレーションの結果がほぼ等価であることがわかる．

表 1 パラメータの設定

質量	m_i, m_2	10
バネ係数	k_1	3000
	k_2	2000
減衰定数	h_1, h_2	0.005
タイムステップ		0.0001

5.　まとめ

本研究では, モード削除法をバネ - 質点モデルに適用するためのアルゴリズムと, 変換式を示した. また, モード削除法を適用した場合と, 適用しなかった場合とのシミュレーションの比較を行った.

今後の展望として, 前述ようにモード削除法の適用は, 現在, 図 4 に示したモデルを対象にしたシミュレーションのみである．しかし，バネ - 質点モデルは布, 柔らかい物体をはじめとする様々な物体の構築に用いられている. 今後このような複雑な構造のモデルへの適用が考えられる．しかし，複雑なモデルになるにつれ固有値に複素数が表れるため, この問題についても対処する必要がある.

参考文献

[1] Kwang-Jin Choi, Hyeong-Seok Ko, “Stable But Responsive Cloth”, Computer Graphics (Proc.SIGGRAPH), 2002, pp.604-611.

[2] 小林輝，吉田典正，頂点分割による柔らかい物体の破壊，画像電子学会第 34 回年次大会，予稿集, pp.69-70, 2006.

[3] 小林輝，吉田典正，柔らかい物体の仮想破壊，日本大学生産工学部第 36 回学術講演会，pp.39-42, 2005-12-3.

[4] 佐藤幹浩，吉田典正，対話的な布のシミュレーションに関する研究，第３７回日本大学生産工学部　学術講演会　管理部会, pp.27-30, 2004.

[5] N. Yoshida, M. Sato, and Y. Yamashita, Interactive Visual Simulation of Cloth and Its Stability Test, Report of the Research Institute of Industrial Technology, Nihon University, No. 86, May, 2006.

[6] 長松昭男，モード解析入門，コロナ社.

[7] 神田亮，小泉達也，丸田榮藏，ハイブリット振動法のための数値積分法 －無条件安定と等価な陽的積分法－，日本風工学会論文集，第 31 巻第 1 号

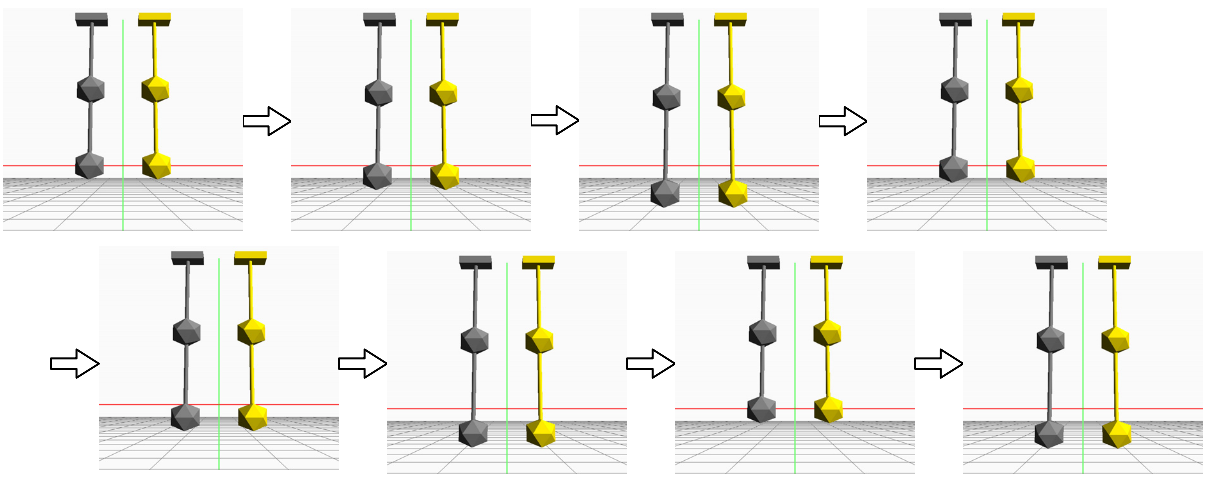

図 6　実行結果