モード削除法を適用した無条件安定と等価な陽的数値積分法

-ハイブリッド振動法への適用-

日大生産工(院) ○谷脇 紗和 日大生産工(院) 扇谷 匠己 日大生産工 神田 亮

1 序論

構造設計の実務や研究では、構造物の地震や風外 乱に対する応答をシミュレーションするために、数 値積分法(直接積分法)が用いられる。ここで言う 数値積分法とは、二階常微分方程式である振動方程 式を解く方法のことで、耐震工学の分野では、 Newmark のβ法が有名である。

自由度の高いモデルの振動解析やハイブリッド 型実験法などでその用途も多様化しつつあり、多く の手法が提案されている。筆者らは、今から約 10 年前、ハイブリッド式実験法を構造物の空力振動現 象に適用したハイブリッド空力振動法¹⁾(以下、 HAT)及びニューハイブリッド空力振動法²⁾(以下、 NHAT)を提案した。また、この手法に適用する数 値積分法を提案し、その有用性を数値実験で示した。

以上のことを踏まえて、本論文ではすでに提案した Modal-Explicit Integration Technique³⁾(以下、MET)を用いてニューハイブリッド空力振動実験を実施し、この数値積分法の有効性を実用的な立場から明らかにすることを目的とする。

2 NHAT と適用する数値積分法の概念

NHATとは、実験と解析を組み合わせ、その両者 の利点を生かし、一つの現象をシミュレーションす るハイブリッド式実験手法を構造物の空力振動現 象に適用したものである。この手法では、実験装置 を制御し、外力データを取り込みながら離散化され た時間上で step-by-step の数値積分を行うため、そ の実施にあたっては、様々な制約を受ける。した がって、この手法で数値積分を実施する際には、以 下の制約を満たす必要がある。

- ① むやみに積分時間刻み ∆*t* を小さく出来ない。
- ② 収束計算等の繰り返し計算を含んではならない。
- ③ 塑性化や除荷及び再載荷等の急激な応力変化 に対しても精度良く追跡できなければならない。
- 次ステップの応答値が陽的に求められなけれ ばならない。

ここで提案する数値積分法は、制約2、3、4を考 慮した陽な Newmark の β 法を基本としており、構 造物の振動特性を考慮してモーダルアナリシスを 適用し、各モード応答を求める。この際、全体の応 答にはほとんど含まれないが、安定条件に厳しい影 響を及ぼすような高次モードの成分は計算しない。 よって、条件①に対し、精度を確保することのみを 考えて積分時間刻み Δt の大きさを定めることがで きる。ここで生じる懸念として、モーダルアナリシ スは非線形な系には適用できないということであ る。しかし、MET では、非線形な復元力を常に一 定の仮想剛性に寄与する成分と不釣合い力の成分 に分離する。また、一般化座標は仮想剛性に対して 定めたものとすることによって、ハイブリッド振動 法における制約を受けても非線形挙動を追跡でき る手法となる。以下にその計算式を示す。また、図 1に概念図を示す。ニューハイブリッド振動法にお いても、外力 f を受け、復元力が非線形な挙動を



Explicit Integration Scheme Equivalent to Unconditionally Stable in Applying Modal Truncation Technique

Sawa TANIWAKI, Narumi OUGIYA and Makoto KANDA

示す場合の多自由度振動系の運動方程式は、式(1) のように表される。

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + r = f \tag{1}$$

ここに、*m*,*c*は、質量、減衰マトリクス、*x*,*x*は、 加速度、速度ベクトル、*r*は、復元カベクトル、*f* は、外カベクトルを表す。左辺の項は、すべてコン ピュータ内で定められ、右辺項の*f*のみが、風洞内 で測定された模型上に作用する風外力となる。

式(1)を基本として、MET では、外力と復元力の 算定の前後に、応答値を座標変換する。また、式(4) ~(6)に示すような応答値の計算は、すべて一般化座 標系上で行うが、非線形な挙動を示す復元力は、容 易に値を求められる実座標系上で算定するのが合 理的である。したがって、式(2),(3)に示すような座 標変換を行う。

一般化座標系上の変位応答 X を実座標系上の変 位ベクトル x に変換する式を次式に示す。

$$x = \sum_{k=1}^{m} \phi_k^I X_k^I \tag{2}$$

ここに、上付添え字Iは仮想剛性 k^{I} に対する一般 化座標系に関する値、下付添え字kはモード次数、 ϕ はモードベクトルを表す。また、添え字mは最高 次のモード次数を表す。

モード応答 X_kは x から次式によって求められる。

$$X_k^I = \frac{\phi_k^{I,T} m x}{\phi_k^{I,T} m \phi_k^I} \tag{3}$$

ここに、上付き添え字 Tは転置を表す。さらに、加 速度と速度についても式 (2),(3) と同様な関係が成 り立つ。

陽な Newmark の β 法において、一般化座標系上 における変位応答、速度応答、加速度応答は次式に よって求められる。

$$X_{i+1}^{I} = X_{i}^{I} + \dot{X}_{i}^{I} \Delta t + 1/2 \ddot{X}_{i}^{I} \Delta t^{2}$$
(4)

$$\dot{X}_{i+1}^{I} = \dot{X}_{i}^{I} + 1/2(\ddot{X}_{i}^{I} + \ddot{X}_{i+1}^{I})\Delta t$$
(5)

 $\ddot{X}_{i+1}^{I} = -M^{I,-1}C^{I}\dot{X}_{i+1}^{I} - M^{I,-1}R_{i+1}^{I} - M^{I,-1}F_{i+1}^{I}(6)$ ここで、下付添え字 *i* は、離散化された時刻歴上の ステップ数を表す。また、*M* は一般化質量、*K* は 一般化剛性、*C* は一般化減衰、*F* は一般化座標系 における外力ベクトルを表す。

各モード応答は互いに独立であり、応答値に対し て支配的なモードのみを応答計算し、その他は削除 可能である。この考え方に基づき、振動数が高く安 定条件確保には厳しいが、全応答に対する支配量は 少ない高次モードを計算しない。これにより、数値 積分法全体では、緩やかな安定条件で精度について 満足できる解が得られることが予想できる。この操 作は、式(2)においてm = m'(m'は、応答に対して 支配的な最高次のモード次数)とし、式(3) ~(6)の kは1からm'に対し、計算すれば自動的に行える。 以上より、MET は①~④の制約下においてもあ る程度の精度を有する解を得ることができる。次章 以降では、数値実験、NHAT を行い、解の精度につ いて検証する。

3 数值実験

本章では NHAT に先立ち、コンピュータのみによ る数値実験により、MET の精度について検討する。 数値実験は、弾塑性挙動を示す高層建物の縮約モデ ルを用いた数値実験1と高層免震建物を想定した モデルを用いる数値実験2を実施する。以下、二つ の数値実験について述べる。

3.1 数值実験 1

ここで用いるモデルは、最上部の剛性を極端に硬 くし、高次モードを含むようにしたせん断5 質点系 モデルである。本来、構造物に外力が作用した場合、 構造物全体が塑性化することを想定し、1~4層に 塑性化するバネを設置する。ここで用いる振動系モ デルと各質量m、バネ定数k、固有円振動数 ω を 図2に示す。解析に用いる復元力特性は、図3に示 すようなバイリニア型とする。バイリニア型の復元 力特性を用いる際の各パラメータは、1~4層の初 期剛性が 10×10⁴,8×10⁴,6×10⁴,4×10⁴kN/m、バ イリニア係数が各層 0.07、降伏変位が各層 0.02m とする。塑性化するバネ、すなわち等価剛性 k ª を 履歴曲線において、最大応答変位時と最小応答変位 時の値を直線で結んだ傾きとし、1~4層のk ªを 9454kN/m, 16672 kN/m, 26324 kN/m, 37588 kN/m とする。1~4層の塑性率はそれぞれ約 3.7,4.2,4.6,7.2 とする。さらに、k J/k a =1 とする。

解析に用いる減衰は、仮想剛性に対して直交性を 有するように定めた。各モードにおける減衰定数は 0.01 とした。使用する外力では、振動系の2次の固 有円振動数までは一定のパワーを有し、それ以降は 全くパワーのない振幅モデルを想定した。また、位 相は一様乱数によりモデル化した。これらのモデル に基づいて、各周波数成分の正弦波の振幅と位相を 定め、それらを各時刻において重ね合わせることに よって、時刻歴上の外力を求めた。各質点に作用す る外力の相関性は0とした。このような外力により 得られる応答値は、2次モード以下が支配的になる ことが予測される。

MET で求めた解は、陽な Newmark の β 法で求 めた解、すなわち、MET の全モードを考慮した解 (基準解)と比較し、その精度を検証する。陽な Newmark の β 法は、線形加速度法よりも数値積分 の精度は劣るが、次ステップの解を求めるために剛 性を必要としないため、非線形な復元力に対しては 精度の良い解が得られる。さらにこの手法は、積分 時間刻みを十分細かくすれば線形加速度法と同等 な精度を得ることも知られている。

陽な Newmark の β 法の積分時間刻み Δt_N は、 $\omega_m \Delta t_N < 2$ かつ $\omega_m \Delta t_N < 0.5$ を満足するよう $\Delta t_N = 0.001$ 秒と設定した。MET の積分時間刻み Δt_M M は、 $\omega_m \Delta t_M < 0.5$ のみ満足するよう $\Delta t_M = 0.01$ 秒と設定した。本解析では、 $\omega_5 \Delta t_M = 15.267$ とな る。これら 2 つの積分時間刻みの関係は、 $\Delta t_N \times 10=\Delta t_M \ bar{s}$ となる。なお、ステップ数は、陽な Newmark の β 法の解を求める際は、40960 であるのに対し、 MET はその 10 分の 1 の 4096 となる。MET では、 解析によるコンピュータへの負荷が陽な Newmark の β 法より非常に小さいことがわかる。また、解析 を行うにあたり、支配的なモードの最高次数、すな わち重ね合わせるモード次数は 4 次モードとする。

上記のような条件で解析を行った結果を図4に 示す。これらの図は、振動系モデル質点3の応答加 速度、変位の時刻歴と履歴曲線である。METの解 は、基準解と一致している。これらのことからモデ ル1では、METにより安定で精度的にも問題のな い解が得られることがわかった。

3.2 数值実験 2

ここでは、高層免震建物を想定したせん断 36 質 点系モデルを用いて MET の精度を検証するための 数値実験を行う。ここで用いる振動系モデルと固有 円振動数 ω を図 2 に示す。各質量は一様に 650t と し、剛性は高さ方向に比例的に変化するように分布 させた。なお、2 層剛性は 4.5×10⁶ kN/m で、36 層は 1.5×10⁶ kN/m である。免震層の初期剛性を 462648kN/m、数値実験1と同様に定める等価剛性 k^a=97286 kN/m とする。 重ね合わせるモード次数 は、3~15とした。また、k¹/k^aは0.5,1.0,1.5, 2.0, 5.0 の五種類とした。その他の解析諸元は、数値実 験1と同様とする。これらの代表的な結果として、 重ね合わせるモード次数10の場合の結果を図5に 示す。図は振動系モデルにおける質点1の応答加速 度、変位の時刻歴、履歴曲線である。また、表1に 重ね合わせるモード次数と k ¹/k^aの関係による解 の精度について良、限界、不良の3つに分類してま とめた。

これより、 $k^{-1}k^{a} \leq 2$ の条件下における MET は、約5次モードでも精度の良い解が得られた。また、 MET と陽な Newmark の β 法の積分時間刻みの関係 は、 $\Delta t_{N} \times 10 = \Delta t_{M}$ と設定しても MET は精度の良い 解が得られることから、MET を用いれば計算時間 が大幅に短縮できることがわかった。

4 MET を適用した NHAT

ここでは、MET の有用性を示すため NHAT を適 用した実験システムによって、高層免震建物の空力 不安定振動を再現するための実験を行う。使用する 実験システムは、高層免震建物の空力振動を対象と した、スウェイとロッキングモードを有する NHAT システム(以下、S-R.H)である。システムの原理 は NHAT の考え方に基づいている。この実験では、 一層に損傷が集中する高自由度の建物に対する空 力不安定振動発現の検討が行える。

ここで対象とする建物は、数値実験2のモデルと 同様である。ここで用いる実験装置を図6、実験模 型を図7に示す。風圧測定点は、片面一層に5点ず つを6層に配置、両面で合計60点とする。免震層 の復元カモデルは、図3に示すようなバイリニア型 に置換した。幾何学スケールは1/250、風速スケー



図3 免震層の復元力モデル (バイリニア型)





応答変位		応答加速度						
/	0.5	1	1.5	2	5		/	
mode15	0	0	0	0	0	- [mode15	
mode14	0	0	0	0	\triangle		mode14	
mode13	0	0	0	0	×		mode13	
mode12	0	0	0	0	×		mode12	
mode11	0	0	0	0	×		mode11	
mode10	0	0	0	0	×		mode10	
mode9	0	0	0	0	×		mode9	
mode8	0	0	0	0	×		mode8	
mode7	0	0	0	0	×		mode7	
mode6	0	0	0	0	×		mode6	
mode5	0	0	0	0	×		mode5	
mode4	0	0	0	Δ	×		mode4	Ι
mode3	×	×	×	×	×		mode3	

10/										
5	/	0.5	1	1.5	2	5				
С	mode15	0	0	0	0	0				
Δ	mode14	0	0	0	0	0				
×	mode13	0	0	0	0	0				
×	mode12	0	0	0	0	0				
×	mode11	0	0	0	0	0				
×	mode10	0	0	0	0	0				
×	mode9	0	0	0	0	0				
×	mode8	0	0	0	0	0				
×	mode7	0	0	0	0	×				
×	mode6	0	0	0	0	×				
×	mode5	0	0	0	0	×				
×	mode4	×	х	X	х	×				
×	mode3	×	×	x	×	×				

ルは 1/20、時間スケールは 1/12.5 とする。免震層 の降伏荷重 Qy は、実風速 60 m/s における弾性実験 時の最大せん断力とした。バイリニア係数αは、 0.01,0.07,0.10,0.15 とする。実験気流は、空力不安 定振動が発現し易い、一様流とした。実験風速は、 2.5~6.5m/s の範囲とする。減衰機構は仮想剛性に 対して定められたモードに直交性を有する。各モー ドの減衰定数は 0.5%とする。時間刻み、ステップ 数はそれぞれ 0.002 秒、26000 ステップとする。

この実験では、数値実験では考慮しなかった依存 風力が含まれるが、依存風力が含まれていても、数 値実験と同様な精度があるかを確かめるためにモ ード次数を変化させ、応答変位の精度の比較を行っ た。数値実験2の結果より、重ね合わせるモード次 数は5以上の5、10、15とした。その結果を図8 に示す。最大応答変位の値はほぼ同様な値が得られ た。よって、モード次数により、5次以上のモード を重ね合わせれば、精度の良い解を得られることが 予測できる。これより、今回は考慮するモード次数 を15次モードとした。

上記の条件より行った結果である弾塑性応答曲 線を図9に示す。また、図10にバイリニア係数0.07、 無次元風速8.4、11.2において免震層が弾塑性挙動 を示す場合の応答加速度、変位の時刻歴、履歴曲線 を示す。図9より、免震層が弾性挙動を示す場合は、 無次元風速8.4付近で応答曲線の立ち上がりが見ら れ、無次元風速11.2付近において応答値が最大と なる。しかし、弾塑性挙動時には応答の増大がほと んどみられない。

本実験より、MET を適用した NHAT で高層免震 建物のような一部が損傷する建物に対する空力不 安定現象発現の有無を判定することが出来た。

5 まとめ

MET の有効性を明らかにするため、MET を適用 した数値実験並びに NHAT を実施した。その結果、 以下のような知見を得た。

- MET では、数値実験1より複数層塑性化する 質点系モデルにおいて、Δt を大きくしても精 度の良い解が得られた。
- 数値実験2より高層免震建物を想定したモデ ルにおいて、重ね合わせるモード次数が低く、 Δt が大きい場合でも精度の良い解が得られた。
- MET を適用した NHAT を用いて、一部が損傷 するような建物に対する空力不安定現象発現 の有無が検討できた。

「参考文献」

- M. Kanda, A. Kawaguchi, T. Koizumi, E. Maruta : A new appro ach for simulating aerodynamic vibrations of structures in a wind tunnel -development of an experimental system by means of hybrid vibration technique-, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, Vol.91, pp.1419-1440, 2003.
- 2) 松山哲雄、神田亮、平田和也、名波航、丸田榮藏:多点同時風圧計を組み込んだハイブリッド振動実験システムの開発、日本建築学会技術報告集 第22号(2005.12)、 pp139-144
- 3) 神田亮、扇谷匠己、矢作貴、丸田栄蔵:ハイブリッド振動 法の制御アルゴリズムに関する研究、日本大学生産工学部 研究報告A



