ソリトン方程式の離散化，超離散化

日大生産工　永井　敦

ソリトン方程式は非線形であるが，可積分な，つまり解を陽に書き下せる微分方程式である．代表的な方程式として KdV 方程式

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

があげられる．これは N ソリトン解をもつ．ソリトンの特徴として

1. 安定に伝わる．振幅が大きいほど速度は速い．
2. 2 つ以上のソリトンが衝突しても，衝突前後でソリトンの形は不変である．
3. 衝突前後で位相のずれを生じる．

このような方程式は数多く報告されている．今回はソリトン方程式の独立変数の離散化，そして従属変数の離散化（超離散化）について最近の結果も交えながら解説する．

1　ソリトン方程式の離散化

さて離散化といっても非線形方程式の場合はここを前進差分で置き換えて…という具合には差分化できない．差分化した方程式が元の微分方程式と全く違う挙動をすることもある．

ここではまず折角ソリトン方程式には解があるのだから，解からスタートして，解を保存するように差分化することを考える．その結果元の微分方程式とは似ても似つかぬ形をすることが多い．例えば離散 KdV 方程式は以下の通りである．

$$\frac{U_n^{t+1} - U_{n+1}^{t-1}}{\delta} = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{U_{n+1}^t} - \frac{1}{U_n^t}\right)$$

これはもとの KdV 方程式とは似ても似つかぬ形をしているがある特殊な極限で KdV 方程式に収束する．もちろんソリトン解をもつ．

興味深い事実を 1 つあげる．数値解析の分野で数列の加速法と呼ばれるアルゴリズムがある．収束の遅い数列をある変換によって極限により速く収束させるのが目的である．いくつかアルゴリズムがあるのだが，そのうちの 1 つである η アルゴリズムについて解説する．

$$s_n = c_0 + c_1 + c_2 + \cdots + c_n$$

として $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n = c_0 + c_1 + c_2 + \cdots$ を求めたいとする．漸化式

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\eta(2i+1,j)} + \dfrac{1}{\eta(2i,j)} \\ \quad = \dfrac{1}{\eta(2i,j+1)} + \dfrac{1}{\eta(2i-1,j+1)} \\ \qquad (i,j = 0,1,2,\cdots) \\ \eta(2i+2,j) + \eta(2i+1,j) \\ \quad = \eta(2i+1,j+1) + \eta(2i,j+1) \\ \qquad (i,j = 0,1,2,\cdots) \\ \eta(-1,j) = \infty,\ \eta(0,j) = c_j \quad (j = 0,1,2,\cdots) \end{cases}$$

を用いると，元の数列 s_n がより速く極限に収束する新しい数列 $t_n = \eta(0,0) + \eta(1,0) + \cdots + \eta(n,0)$ に変換される場合がある．上の漸化式は

従属変数変換

$$U(2i-1,j) = \frac{1}{\eta(2i-1,j)},$$
$$U(2i,j) = \eta(2i,j)$$

によって，離散 KdV 方程式と等価である．[5]

2　ソリトン方程式の超離散化

最も簡単なソリトン系として以下のソリトンセルオートマトン [6] がある．これは有限個の玉と無限に並ぶ箱（箱の中には最大 1 個の玉が入る）からなる系を以下のルールで時間発展したものである．

「時刻 t での状態が与えられたとする．このとき左の方の玉から順に，右側の最も近い空き箱に移動する．すべての玉が 1 回ずつ動いたら時刻を $t+1$ にする」

このルールで系の時間発展を見ると以下のようになる．

0 1 1 1 0 0 0 1 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 1 1 1 0 0 1 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 1 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 1 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 1 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 1 1 1
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0

ここで時刻は下向きが増えていく向きである．また $0,1$ はそれぞれ空き箱と玉の入っている箱を表す．これからも分かる通り，KdV 方程式のソリトンと同じ時間発展が箱と玉だけの簡単なルールで再現される．

それではこの箱球系は何か連続系や離散系のソリトン方程式と関係があるのか．結論からいうと，箱球系を支配する方程式は離散ソリトン方程式に対して超離散極限と呼ばれる極限操作を行うことによって得られる [7]．これからソリトンセルオートマトンのソリトン性の証明や保存量の構成を行うことが可能である．[8]

参考文献

[1] 中村佳正，辻本諭，西成活裕，佐々成正，松木平淳太，梶原健司，永井敦，渡邊芳英，「可積分形の応用数理」，裳華房 (2000)．

[2] 数理科学, 特集「広がる可積分系の世界」, No. 3, 1997.

[3] 数理科学　特集「超離散」, No. 9, 1999.

[4] 数理科学　特集「差分学の世紀」, No. 9, 2003.

[5] A. Nagai and J. Satsuma : Phys. Lett. A, **209** (1995) 305.

[6] D. Takahashi and J. Satsuma : J. Phys. Soc. Jpn., **59** (1990) 3514.

[7] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira and J. Satsuma : Phys. Rev. Lett., **76** (1996) 3247.

[8] T. Tokihiro, A. Nagai and J. Satsuma : Inverse Problems, **15**(1999) 1639.