ウェイト推定法における最適な一般化平均法

日大生産工(院)　＊後藤　格
日大生産工(院)　稲嶺　和哉
日本大学　篠原　正明
日本大学　大澤　慶吉

1 はじめに

AHP におけるウェイト推定法としては、固有ベクトル法、各種最小二乗法、幾何平均法、算術(相加)平均法、調和平均法などが存在する。本研究では、幾何平均法、算術(相加)平均法、調和平均法を含む「平均法」の一般化として、「一般化平均法」を考え、精神物理実験ならびに理論シミュレーションについて、最適な一般化平均法のパラメータを考察する。
また、精神物理実験における被験者に同じ実験をしてもらい、各種感性メディアによる、被験者の特性が同じか否か、すなわち、例として面積実験で調和型グループに属する被験者は線分長実験でも同様な結果になるか、などを検討する。

2　精神物理実験の説明

精神物理実験とは、人間の感覚そのものを頼りに実験を行い（本研究では比較実験)、アンケート調査を行い、得た結果から一対比較を行いウェイト算出することである。
今回のアンケート調査を実施するにあたって、AHP の概念を理解している前提の下で調査を実施し有効回収率を高める為、被験者を日本大学大学院生産工学研究科数理情報工学専攻、また日本大学生産工学部数理情報工学科に所属する学生に絞った。
対象とする面積実験と線分長実験について以下に説明を行う。

2.1　面積実験

５つの異なる面積の図形を用意し、その５つの図形の面積を一対比較する。本実験で用いた面積比較図を図 1 に示す。

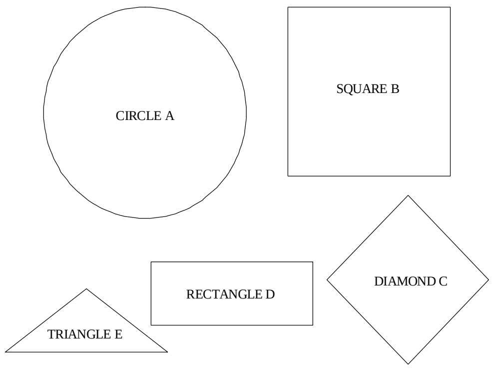


図 1:面積実験

2.2 線分長実験

５つの異なる長さの線分(直線や曲線)を用意し、その５つの総線分長を一対比較する。本実験で用いた線分長比較図を図 2 に示す。

Optimal parameter generalized averaging in weight estimation
Itaru GOTOU †,Kazuya INAMINE
Masaaki SHINOHARA ,and Keikichi OSAWA

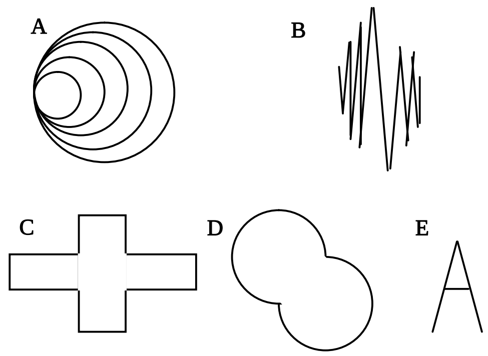


図 2:線分長実験

3 理論シミュレーションの説明

1.真値ウェイトベクトル w^0 を与える。

2.整合一対比較行列Wを作成する。

$$W = \{w_{ij}\} \qquad \left(w_{ij} = \frac{w_i^0}{w_j^0} \right) \tag{1}$$

3.Wに(例えば乗法形)誤差を加え標本一対比較行列Sを生成する。

4.標本一対比較行列Sに対してウェイトベクトルを算出する。

5.真値 w_0 と推定ウェイトベクトル w_s の間の平均距離 $\bar{d}_{0s}$ (添字 s は標本 s を示す)を計算する。

4 一般化平均法によるウェイト推定法

推定されるウェイトベクトルを $w = \{w_i\}$ とし、n 項目間の一対比較行列を $A = \{a_{ij}\}$ とする。

n 個のデータに対してパラメータ p を導入し、第 i 行に対する p 次一般化平均 $w_i(p)$ を以下で定義する。

$$w_i(p) = \left(\frac{\sum_j a_{ij}^p}{n} \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2}$$

この際、$w_i(p)$ の合計が1となるように正規化を行う。

5　距離の定義

真値と一般化平均法での推定値との近接度合いを、絶対距離で評価する。

絶対距離の計算方法

$$A_{(0,s)} = \sum_{i=1}^{n} \left| w_{(i)}^0 - w_{(i)}^s \right| \tag{3}$$

$w_{(i)}^0$:真値の第 i 要素

$w_{(i)}^s$:第 s 標本の推定値の第 i 要素

6 実験結果

6.1.1 精神物理実験

面積実験では、27 人の被験者の真値との距離の平均値は、パラメータ $p = -0.2$ で最小、線分長実験では、27 人の真値との距離の平均値は、パラメータ $p = 1.0$ で最小となった。但し、個々の被験者は、調和平均型グループと算術(相加)平均型グループに大きく分けられた。(面積実験:調和平均型グループ 12 名、算術平均型グループ 11 名、幾何平均型グループ 2 名)(線文長実験:調和平均型グループ 11 名、算術平均型グループ 15 名、幾何平均型グループ 1 名)

少人数の標本数では、どちらのグループの被験者数が支配的かによって、全体の最適なパラメータ p が左右される。面積実験、線分長実験それぞれの平均距離特性を、表 1,2 に示す。

表 1:平均距離特性(面積実験)

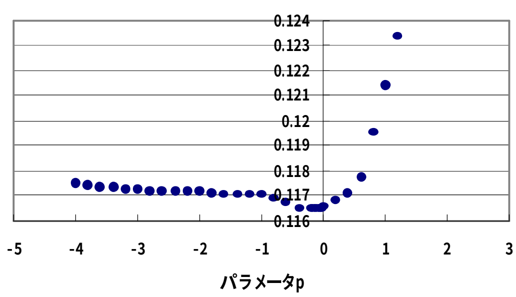
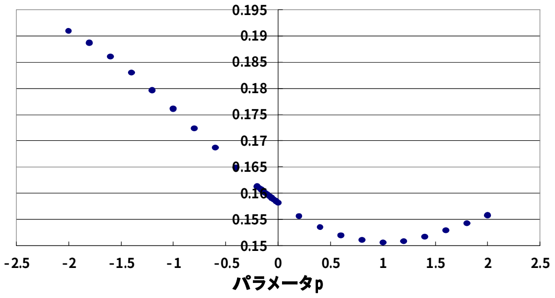


表 2:平均距離特性(線分長実験)



次に、面積実験、線分長実験それぞれの距離特性が特殊なグラフを表 3,4 に示す。

表 3:距離特性(面積実験での特殊な１標本例)

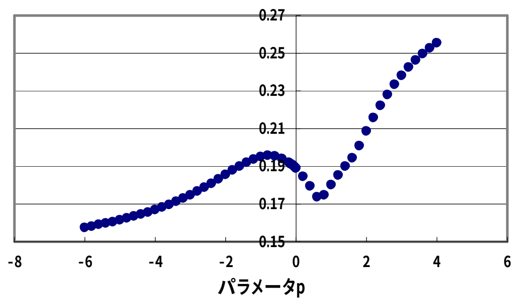
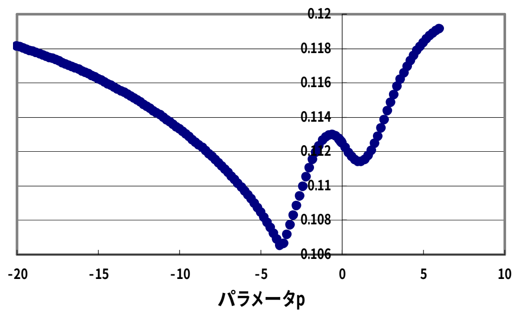


表 4:距離特性(線分長実験での特殊な１標本例)



6.1.3 各種感性メディアによる被験者の特性

同じ被験者による、面積実験、線分長実験での特性は、それぞれの実験から得られた結果により、同じグループに分けられた被験者が 13 名、そうでなかった被験者が 14 名となり、約 1/2 の確率で同じグループに分けられる結果となった。

6.2 理論シミュレーション実験

6.2.1 真値を面積実験での真値に設定したシミュレーション実験

標本数 n＝1 とし、乗法形誤差として、[1-0.15,1+0.15]の一様乱数を設定し、シミュレーションした。真値ウェイトベクトル w^0 を(25π,64,32,24,12)とし、その結果のパラメータ p による真値からの距離特性を表 5,6 に示す。

表 5:距離特性(調和型グループの１標本例)

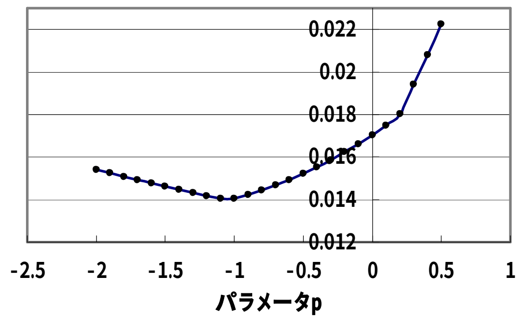
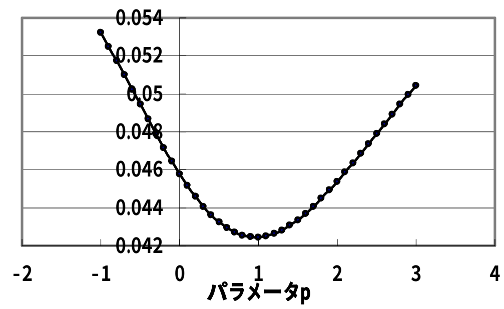
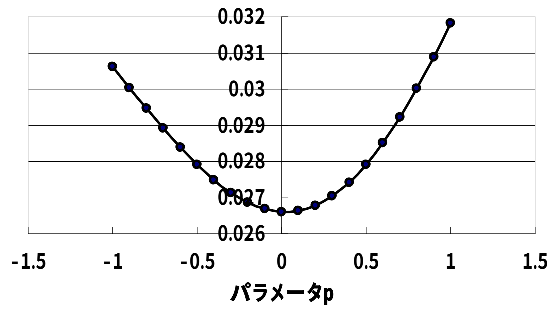


表 6: 距離特性(相加型グループの１標本例)



次に標本数 n＝10,000 とした真値からの平均距離特性を表 7 に示す。

表 7:標本数 10,000 の平均距離特性



6.2.2 真値を線分長実験での真値に設定したシミュレーション実験

標本数 $n=1$ とし、線分長実験では、比較的誤差が生じやすいと推測される実験の為、乗法形誤差を[1-0.5,1+0.5]の一様乱数に設定し、シミュレーションした。真値ウェイトベクトル w^0 を線分長実験の真値と同様、

(20π,48,26,6π,9)とし、その結果のパラメータ p による真値からの距離特性を表 8,9 に示す。

表 8:距離特性(調和型グループの１標本例)

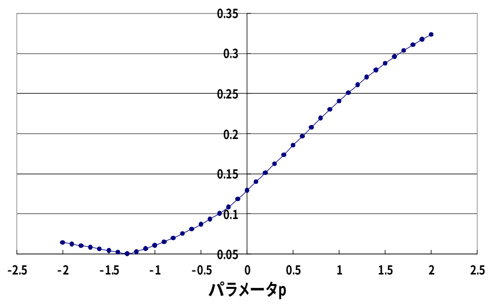
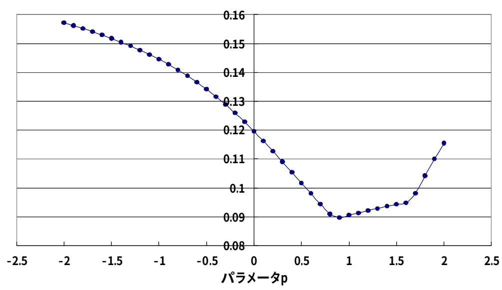
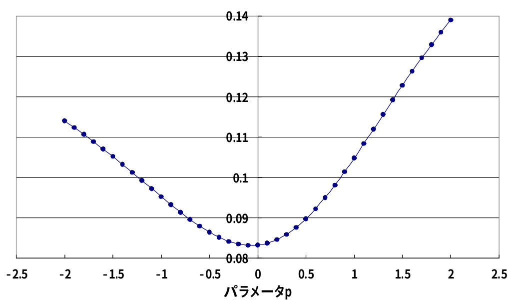


表 9:距離特性(相加型グループの１標本例)



次に標本数 $n=10{,}000$ とした真値からの平均距離特性を表 10 に示す。

表 10: 標本数 10,000 の平均距離特性



7 考察

結果として、シミュレーション実験、精神物理実験ともに同傾向のデータ、グラフが得られた。この結果から推定すると、標本数を１とした場合、真値との近接度合い(距離)が最も近いものが調和平均法側に偏る場合($p \le -0.5$)と、算術(相加)平均法側に偏る場合($p \ge 0.5$)の 2 パターンに分かれる結果が多く得られた。標本数を多くとると、幾何平均法 ($p \to 0$)が距離最小となる結果が多くなる。これは、調和平均、算術(相加)平均の 2 パターンの偏りの平均により、幾何平均法($p \to 0$)に近い値に近づいたと考えられる。

各種感性メディアによる被験者の特性においては、実験により同じグループになった確率が約 1/2 になったことから、同じ人物の結果は違う種類の実験においてどちらかのグループに偏ったりすることはないと今回の実験結果からは言える。

8 おわりに

本研究により、人間には調和平均法を用いると真値に近いウェイト推定が可能なグループと、算術(相加)平均法を用いると真値に近いウェイト推定が可能なグループの２パターンが存在するデータが得られた。標本数 10000 など大きい場合、$p \to 0$ が最小になる傾向があるが、必ずしも幾何平均法が最適な推定法ではなく、相加型グループが最適な場合と、調和型グループが最適な場合に多く分かれる結果の平均をとり、結果的に幾何型に最小値がきた、ということである。

今後の研究では物理実験の標本数を増やし、さらに信頼度のあるデータを得る。次に、データなどから被験者によって調和型と相加型に分かれる原因を解析していく。また、整合度との距離特性の関係を検討していきたい。