Saaty 整合度 CI の持つ意味についての考察

－推定値に対する倍率誤差との関係－

日本大学（院）　＊稲嶺　和哉　日本大学（院）　後藤　格
日本大学　篠原　正明　日本大学　大澤　慶吉

1　はじめに

AHP では、より信頼性の高いデータを解析する為に各一対比較行列の整合度 CI を求め、その CI の値が 0.1 未満の時サーティ氏は整合性があると述べている（例えば、[1]）。又、各一対比較行列の整合度 CI は、一対比較判断の論理的整合性（Logical Consistency）を示す尺度であり、必ずしも一対比較行列の妥当性（Validity）あるいは、推定値の真値への近さを示すわけではない点は実験的研究により示されている（[2]）。さらに各種の整合度の関係もシミュレーション研究により調べられている([3])。そこで、整合度 0.1 未満は整合性がある（信頼性がある）、というのはいったいどのような意味を持つのかという点に着目し、CI の持つ意味また一対比較測定行列における各測定要素と推定値の倍率誤差との関係などを本研究で調べたので報告する。

2　整合度 CI と倍率誤差δとの関係

一対比較行列 A の右固有ベクトル w、主固有値 $\lambda_{\max}$ は、

$$Aw = \lambda_{\max} w \tag{1}$$

を満足する。(1)式の第 i 行に注目すると、

$$\sum_j a_{ij} w_j = \lambda_{\max} w_i \qquad ,i = 1,\cdots,n \tag{2}$$

が成立する。両辺を i について総和して整理すれば、次式を得る。

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1} = \frac{\sum_{i \neq j} e_{ij}}{n(n-1)} - 1 \tag{3}$$

但し、$a_{ij} = (\frac{w_i}{w_j}) e_{ij}$ (4)

ここで、$e_{ij} > 1$ に対して $e_{ij} = 1 + \delta_{ij}$ とするならば、

$$e_{ij} + e_{ji} = e_{ij} + \frac{1}{e_{ij}} \approx 1 + \delta_{ij} + 1 - \delta_{ij} + \delta_{ij}^2 - \delta_{ij}^3 + \cdots \tag{5}$$

となり、2 次項で近似すれば、次式を得る。

$$e_{ij} + e_{ji} \approx 2 + \delta_{ij}^2 \tag{6}$$

よって、(6)式を(3)式に代入すれば、近似的に次式を得る。

$$2CI = \frac{1}{n(n-1)} \sum \delta_{ij}^2 = \overline{\delta^2} \approx \overline{\delta}^2 \tag{7}$$

但し、(7)式の右辺のΣは、$e_{ij} > 1$ になる(i,j)対集合についての総和である。すなわち以下の 2 次近似式Ⅰが成立する。

$$2CI \approx \overline{\delta}^2 \tag{8}$$

ここで、$\overline{\delta}$ は $e = 1 + \delta > 1$ となる乗法系測定誤差での小数部分 δ の一対比較全体での平均値を表し、測定値の推定値からのかい離を表現する一尺度と考えられる。

また $\overline{\delta^2}$ は、$\delta_1 = 0.1, \delta_2 = 0.2, \delta_3 = 0.3$ ならば、

$$\overline{\delta^2} = \frac{1}{3}(\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2) \tag{9}$$

である。よって $\sqrt{\overline{\delta^2}} = \sqrt{\frac{1}{3}(\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2)}$

Relationship between Saaty's CI and multiplicity error δ

Kazuya INAMINE† ,Itaru GOTO, Masaaki SHINOHARA and Keikichi OOSAWA

である。従って、2 次近似式 I で用いた $\bar{\delta}$、

$$\bar{\delta} = \frac{1}{3}(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3) \tag{10}$$

の 2 乗 $\bar{\delta}^2$ と(9)の $\overline{\delta^2}$ と $2CI = \overline{\delta^2}$ は異なる点に注意し、(9)式の $\overline{\delta^2}$ を使えば次の 2 次近似式 II $2CI \approx \overline{\delta^2}$ を得る。

3 次項近似では(3)、(5)式より

$$CI = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{e_{ij}>1} (\delta_{ij}^2 - \delta_{ij}^3) \tag{11}$$

となり次の近似式が考えられる。

近似式 1

$$2CI = \overline{\delta^2 - \delta^3} \tag{12}$$

$$= \frac{2}{n(n-1)} \sum (\delta_{ij}^2 - \delta_{ij}^3)$$

近似式 2

$$2CI = \overline{\delta^2} - \overline{\delta^3} \tag{13}$$

ただし、

$$\overline{\delta^2} = \frac{2}{n(n-1)} \sum \delta_{ij}^2, \overline{\delta^3} = \frac{2}{n(n-1)} \sum \delta_{ij}^3 \tag{14}$$

近似式 3

$$2CI \approx \bar{\delta}^2 - \bar{\delta}^3 \tag{15}$$

3　実験

精神物理実験と理論シミュレーション実験を行った。精神物理実験として、今回、真値が既知である面積実験と音実験の 2 つを行った。また理論シミュレーション実験では、真値にもとづく一対比較行列に乗法形誤差を与えた標本行列について、整合度 CI と倍率誤差との関係を調べた。

3.1　面積実験

面積が既知である 5 つの図形に対して被験者は一対比較行列 A を作成する。

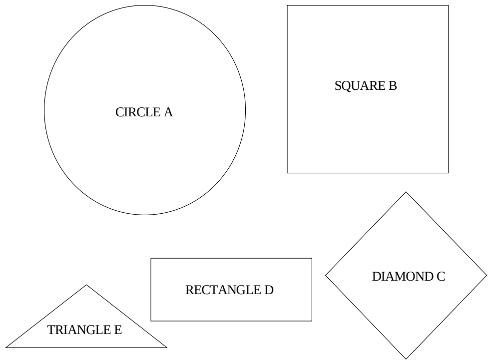


図 1　面積実験

3.2　音実験

音実験として、5 つの長さが異なる音に対して被験者は一対比較行列 A を作成する。

3.3　線分長実験

線分が既知である 5 つの図形に対して被験者は一対比較行列 A を作成する。

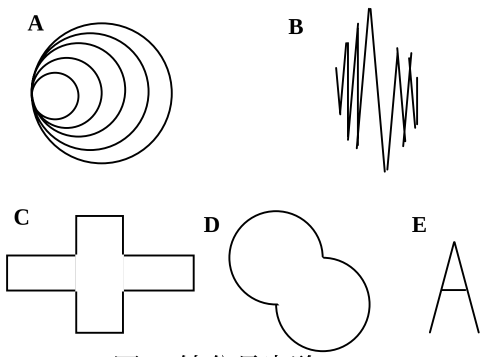


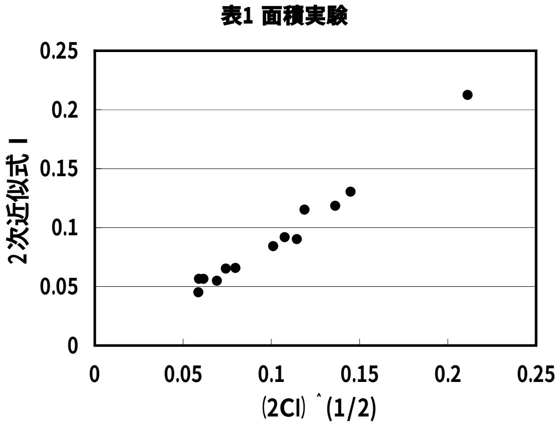
図 2　線分長実験

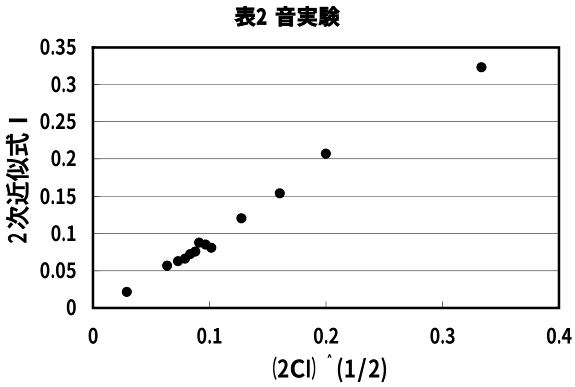
3.3　シミュレーション実験

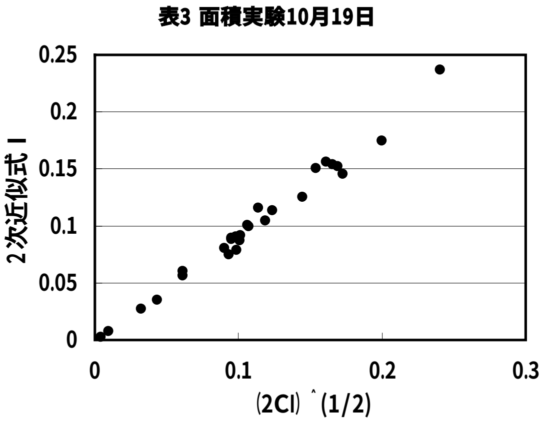
真値にもとづき一対比較行列を生成する。その 1 以上の各要素に、〔1-0.15,1+0.15〕の一様乱数の乗法形誤差を加え、対角要素は逆数とり一対比較行列 A を生成し、整合度 CI と倍率誤差 $\bar{\delta}$ との関係を調べた。また、2 で説明した 3 次項近似を確かめる為、乗法系誤差を大きくして 2 で説明した近似式を確かめることにする。

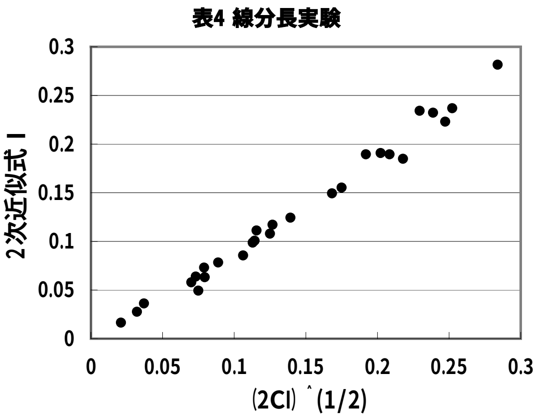
4 実験結果

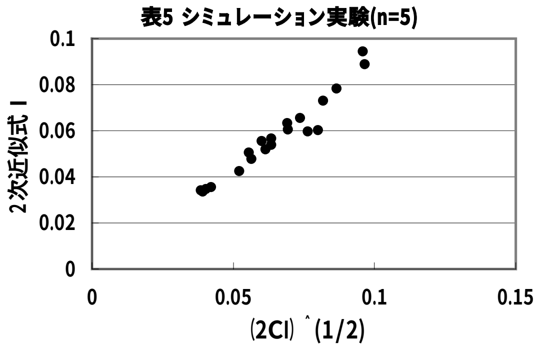
面積実験と音実験と線分長実験、またシミュレーション実験について $\sqrt{2CI}$ を横軸、倍率誤差 $\bar{\delta}$ を縦軸にグラフ表示する。

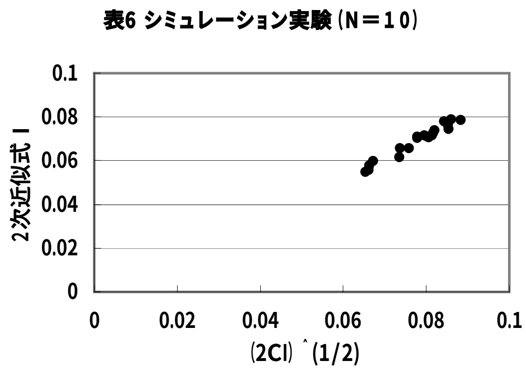


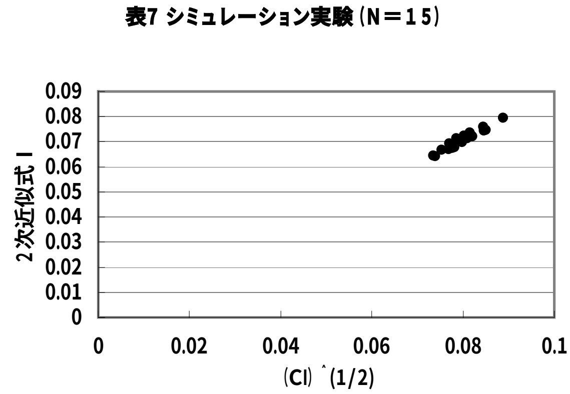












次に、物理実験結果での３次項近似IIとIIIでの結果を以下にまとめた。ここでは２CI を横軸、倍率誤差を縦軸とした。

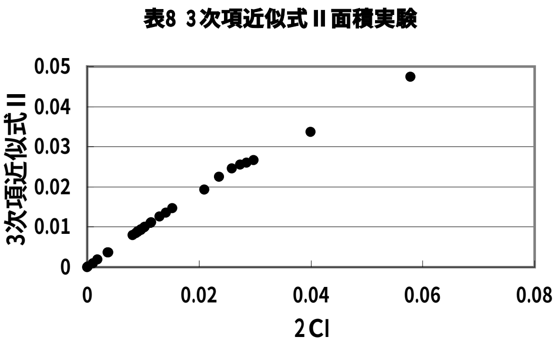


表9 3次項近似式Ⅱ線分長実験

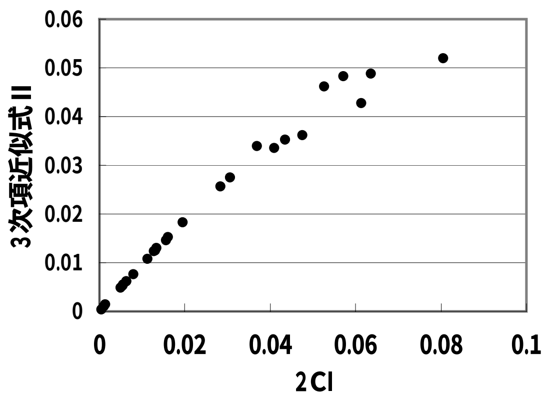


表10 面積（3次項近似III）

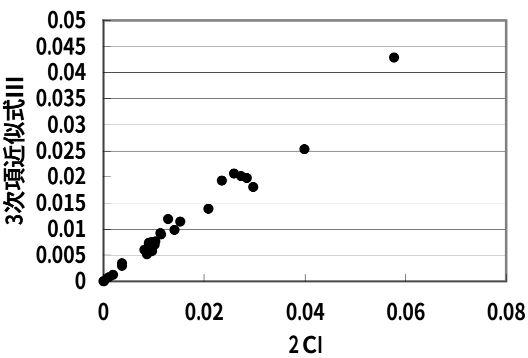
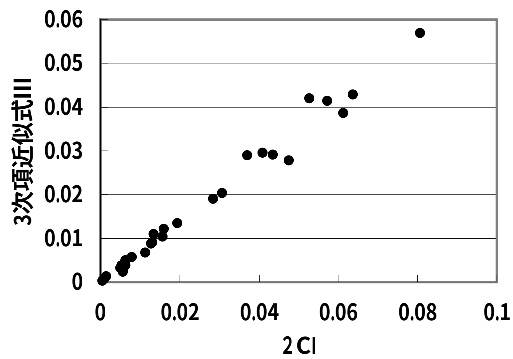


表11 線分長（3次項近似式III）



5 考察

5-1

精神物理実験ならびに理論シミュレーション実験ともに、倍率誤差$\overline{\delta}$と整合度 CI との間の２次項近似式Ⅰの「$\overline{\delta} \approx \sqrt{2CI}$」が近似度の良い関係式を与えることが判明した。従って、整合度 CI=0.1 は$\overline{\delta} \approx 0.45$ に対応しており、推定一対比較値に対して平均的に 50%近いずれが生じる測定データを意味する。又、通常の一対比較実験で得られるより小さな CI 値、例えば、CI=0.01 は、$\overline{\delta} \approx 0.14$ に対応しており、推定一対比較値に対して平均的に 14%程度のずれが生じる測定データを意味する。

また、３次項近似式ⅡとⅢでは CI の値が小さい値をとる場合(CI=0.015 以下）では、３次項近似式ⅡとⅢがほぼ２CI と同じ値をとり、CI の値が大きい値をとるにつれ、誤差が生じた。これは４次項以降のδとの関係によって誤差が生じると考えられる。今回の実験では、整合度における意味の妥当性の部分では、２次近似式Ⅰが整合度の一尺度として考える部分ではよいと判断できる。

5-2

理論シミュレーション実験において、項目数 n=5,10,15 の場合について、関係式の妥当性を調べたが、項目数が増加しても、提案する関係式は成立している。すなわち、項目数に関係なく２次近似式Ⅰ「$\overline{\delta} \approx \sqrt{2CI}$」は成立する。

6.おわりに

一連の一対比較間の論理的整合性を表現する指標である CI と、一対比較測定値のその測定値からの乗法的なかい離度合いを表現する$\overline{\delta}$との関係式を提案し、この妥当性を精神物理実験と理論シミュレーション実験により検証した。これにより、整合度 CI の持つ推定上の実際的な意味が明らかになった。また CI について、大きな値(CI＞0.1)をとるデータでの近似式との検証が今後の課題である。

7.参考文献

[1]T.L.Saaty: The Analytic Hierarchy Process, RWS Publications,P52(1996)

[2]篠原 正明,大澤 慶吉:Logical Consistency vs Validity in Weight Estimation, IFORS2005,MD-19-4(2005.7)

[3]城埜 正道:各種整合度指標のシミュレーションによる比較評価、平成１２年度日本大学生産工学部数理工学科、卒業論文(2001.2)