Saaty 整合度 CI についての考察

―――項目数 $n=2,3$ の場合と全階層 CI―――

日大生産工　○篠原正明
情報システム研究所　篠原健

1．はじめに

CI＝$(\lambda_{\max}-n)/(n-1)$ で定義される Saaty の整合度 CI(Consistency Index)について、(ⅰ)一対比較対象の項目数 $n=2,3$ の場合についての CI 値の陽表現、(ⅱ)個々のローカルな一対比較ではなく、全階層に及ぶ意思決定全体の整合性への適用の２点を考察する。

2．Saaty の CI 指標

n 個の対象を一対比較して得られる $n\times n$ の完全一対比較行列 A に対して、個々の一対比較判断の行列全体としての首尾一貫性の尺度である。例えば、項目１を項目２に対して比較して $a_{12}=2$、項目２を項目３に対して比較して $a_{23}=3$ ならば、項目１を項目３に対して比較した時に首尾一貫性があれば、$a_{13}=6$ となるはずであるが、CI 値はその首尾一貫性を表現する。

CI＝０で完全に整合(首尾一貫)性がとれた場合に対応し、0.1 ないしは 0.15 以下の CI 値が得られれば、一対比較判断全体に整合性があると、経験的に判断している。但し、整合性の高い一対比較行列により必ずしも妥当なウェイト推定が得られることは限らない点は注意を要する〔1〕。

3．項目数 $n=2$ と $n=3$ の場合の CI

完全一対比較行列 A の対角要素は１ $(a_{ii}=1)$ で、対称要素について逆比性 $(a_{ij}a_{ji}=1)$ が成立するとして、以下の解析を行う。

3.1　$n=2$ の場合

一般的に A は(1)式で、その右主固有ベクトル $u=(u_1,u_2)^T$ は(2)式で、CI は(3)式で与えられる。

$$A=\begin{pmatrix}1 & p\\ p^{-1} & 1\end{pmatrix}\qquad(1)$$

$$u=\begin{pmatrix}\sqrt{p}\\ \sqrt{p^{-1}}\end{pmatrix}\qquad(2)$$

$$\mathrm{CI}=0\qquad(3)$$

すなわち、$n=2$ ではいかなる一対比較をしようが、一対比較が一特定対でしか行われないので、一対比較判断間の首尾一貫性は 100％である。項目 1(例えば、2kg の重り)を項目 2(1 kgの重り)に対して比較して、$P=2$ 倍としようが $P=5$ 倍としようが、どちらも CI＝０であり、完全に整合性がとれている。

Two Considerations on Saaty's Consistency Index CI
Masaaki SHINOHARA and Ken SHINOHARA

3.2　$n=3$の場合

一般的にAは(4)式で与えられる。

$$A=\begin{pmatrix} 1 & p & q \\ p^{-1} & 1 & r \\ q^{-1} & r^{-1} & 1 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

簡単な計算により、その右主固有ベクトル $u=(u_1,u_2,u_3)^T$ は(5)式で、CI は(6)式で与えられる。

$$u=\begin{pmatrix} p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{1}{3}} \\ p^{-\frac{1}{3}}r^{\frac{1}{3}} \\ q^{-\frac{1}{3}}r^{-\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \qquad (5)$$

$$\mathrm{CI}=\frac{1}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right)-1 \qquad (6)$$

但し、　$e=(a_{12}a_{23}a_{31})^{\frac{1}{3}}$

$$=p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{1}{3}}r^{\frac{1}{3}} \qquad (7)$$

$n=3$において、恒等的に「CI＝0」という事態ではないが、1 つのパラメータeのみに CI が依存している。ここで、$a_{12}a_{23}a_{31}$は 3 つの項目を一巡して一対比較した時の、一対比較値の積であり、3 つの判断間に首尾一貫性があれば、$a_{12}a_{23}a_{31}=1$となり CI＝0 である。しかし、例えば$a_{12}=3$,$a_{23}=4$, $a_{13}=10$ で $a_{12}a_{23}a_{31}=1.2$ ならば、$e\approx 1.06266$、$\mathrm{CI}\approx 0.00185$となる。全く別の測定データでも、例えば、$a_{12}=1$,$a_{23}=6$, $a_{13}=5$で、$a_{12}a_{23}a_{31}=1.2$ならば、同じ CI 値となってしまう。

4．階層全体の CI

目標――評価基準$(i=1,...,M)$――代替案$(j=1,...,N)$の標準的な 3 階層 AHP において、注目する AHP による意思決定の整合度 $\mathrm{CI}_{\mathrm{total}}$ の算定法として、層別相加平均法、層別相乗平均法、等価２階層法、倍率誤差に基づく方法を提案する。

以下に記号を定義する。

CI_0 ；目標達成の視点から各評価基準相互の一対比較を行った際の整合度

CI_i ；評価基準$i(i=1,...,M)$の視点から各代替案相互の一対比較を行った際の整合度

w_i ；評価基準 i の優先ウェイト $(i=1,...,M)$(但し、$\sum w_i=1$)

$A_i=\{a_{kl}(i)\}$；評価基準iの視点から各代替案相互の一対比較を行った際の $N\times N$ 一対比較行列

4.1　層別相加平均法

$$\mathrm{CI}_{\mathrm{total,add}}=\left(\mathrm{CI}_0+\sum w_i\mathrm{CI}_i\right)/2 \qquad (8)$$

4.2　層別相乗平均法

$$\mathrm{CI}_{\mathrm{total,multi}}=\left(\mathrm{CI}_0\times\prod \mathrm{CI}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{w_i}}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (9)$$

4.3　等価 2 階層法

「目標――評価基準(M個)――代替案(N個)」の 3 階層 AHP を、「目標――代替案(N個)」の等価 2 階層 AHP に変換し、等価 2 階層 AHP の大きさ$N\times N$の等価一対比較行列 $P=\{P_{kl}\}$の整合度として、$\mathrm{CI}_{\mathrm{total,eqv}}$を求める。$P$の$(k,l)$要素は、$a_{kl}(i)$と$w_i$により次式で定義する。

$$\text{相加平均法：} P_{kl}=\sum w_i a_{kl}(i) \qquad (10)$$

$$\text{相乗平均法：} P_{kl}=\prod a_{kl}(i)^{w_i} \qquad (11)$$

4.4　考察

層別相乗平均法は１ヵ所で CI＝0 となれば、

$\mathrm{CI}_{\mathrm{total}}$ ＝０となるので、等価２階層・相加平均法は逆比性が保持されないので、いずれも不適切である。

層別相加平均法でも第一層 CI 値と第２層 CI 値を和して２で割る必然性がない.例えば、$w_1 = 1,\ w_i = 0(i \neq 1)$ の場合に第一層 CI が 0.5 の重みで全体に寄与するであろうか？

等価 2 階層・相乗平均法においても、$\{w_i\}$ のみで第一層の $M \times M$ の一対比較行列の影響がみられない。

以上の考察に基づき、CI ではなく $2\,\mathrm{CI} = \delta^2$ の近似的関係〔2〕にある倍率誤差 δ を用いた総合尺度 $\varDelta$ を以下に提案する。

相加平均法：

$$\varDelta_{add} = \frac{1}{2}\left(\delta_0 + \sum w_i \delta_i\right) \tag{12}$$

相乗平均法：

$$\varDelta_{multi} = \left\{(1+\delta_0)\prod (1+\delta_i)^{w_i}\right\}^{\frac{1}{2}} - 1 \tag{13}$$

但し、$2\mathrm{CI}_i = \delta_i^2$ であり、$2\mathrm{CI}_{\mathrm{total}} = \varDelta^2$ により $\mathrm{CI}_{\mathrm{total}}$ を逆算すればよい。

５．$\mathrm{CI}_{\mathrm{total}}$ の計算例

夏期休暇地の選択問題〔3〕を例にとり、各種 $\mathrm{CI}_{\mathrm{total}}$ を計算する。図 1 に階層図を、図 2 に評価基準間の一対比較、図 3 に各評価基準に関する代替案の一対比較を示す。

夏期休暇地の選択問題

快適さ　　費用　　快楽度

A 海　　B 山　　C 温泉

図１　夏期休暇地選択問題に関する階層構造

	快適さ	費用	快楽度
快適さ	1	3	7
費用	$\frac{1}{3}$	1	3
快楽度	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{3}$	1

$\lambda_{\max} = 3.007$　　C.I.=0.0035

図２　評価基準間の一対比較

快適さ	海	山	温泉
海	1	1	$\frac{1}{3}$
山	1	1	$\frac{1}{3}$
温泉	3	3	1

$\lambda_{\max} = 3.0$　　C.I.=0

費用	海	山	温泉
海	1	1	$\frac{1}{5}$
山	1	1	$\frac{1}{5}$
温泉	5	5	1

$\lambda_{\max} = 3.0$　　C.I.=0

快楽度	海	山	温泉
海	1	3	9
山	$\frac{1}{3}$	1	6
温泉	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	1

$\lambda_{\max} = 3.054$　　C.I.=0.0268

図３　代替案間の一対比較

$\mathrm{CI}_0 = 0.0035,\ \mathrm{CI}_1 = 0,\ \mathrm{CI}_2 = 0,\ \mathrm{CI}_3 = 0.0268$
$w_1 = 0.669,\ w_2 = 0.243,\ w_3 = 0.088$ なので、

$$\mathrm{CI}_{\mathrm{total,add}} = (0.0035 + 0.088 \times 0.0268)/2$$

$$= 0.002929 \qquad (14)$$

$\delta_i^2 = 2\mathrm{CI}_i$ より、$\delta_0 = 0.083666,$

$\delta_1 = \delta_2 = 0,\ \delta_3 = 0.23151674$ となり、従って、次を得る。

$$\Delta_{\mathrm{add}} = 0.052 (\mathrm{CI}_{\mathrm{total,d\text{-}add}} = 0.00135) \qquad (15)$$

$$\Delta_{\mathrm{multi}} = 0.05057 (\mathrm{CI}_{\mathrm{total,d\text{-}multi}} = 0.00128) \qquad (16)$$

3 階層を 2 階層に変換した等価一対比較行列 $P = \{P_{kl}\}$ は、(11)式の定義に従い、次を得る。

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1.1015 & 0.393487 \\ * & 1 & 0.3797 \\ * & * & 1 \end{bmatrix} \qquad (17)$$

但し、対称要素は逆数とする。

従って、 $\mathrm{CI}_{\mathrm{total,eqv}} = 0.00186 \qquad (18)$

4 通りの方法で求めた $\mathrm{CI}_{\mathrm{total}}$ を以下に示す。

層別相加平均法：$\mathrm{CI}_{\mathrm{total,add}} = 0.002929$

倍率誤差相加平均法：$\mathrm{CI}_{\mathrm{total,d\text{-}add}} = 0.00135$

倍率誤差相乗平均法：$\mathrm{CI}_{\mathrm{total,d\text{-}multi}} = 0.00128$

等価２階層･相加平均法：$\mathrm{CI}_{\mathrm{total,eqv}} = 0.00186$

倍率誤差に基づく２つの方法は近似するが、それ以外の方法は近い値をとるとは言えない。

６．おわりに

前半では CI の陽表現について、$n = 2$ では恒等的に CI=0、$n = 3$ では一巡一対比較積 $a_{12}a_{23}a_{31}$ のみに CI が依存することを示した。$n \geq 4$ における CI 値の陽表現式導出が今後の課題である。又、本考察により、CI 値は一対比較判断相互間の論理的整合性、首尾一貫性、無矛盾性を表す尺度であることが、$n = 2,3$ の場合のみであるが明示的に再確認できた。$n = 2$ では CI＝0、$n = 3$ では CI は必ずしも零でない. . . ということは CI 値は n に依存して増加するのであろうか？〔2〕の理論シュミレーションによれば、CI 値は n に依存して増加傾向を示しており、本結果はそれを $n = 2,3$ の場合に示したと言える。

後半では全階層にわたる $\mathrm{CI}_{\mathrm{total}}$ を考察し、それを計算する 4 つの方法を提案した。数値計算例により、４つとも異なる CI 値を与えることを示した。どのような $\mathrm{CI}_{\mathrm{total}}$ の定義式が妥当かは今後の課題である。

参考文献

〔1〕Masaaki SHINOHARA and Keikichi OHSAWA : Logical Consistency vs Validity in Weight Estimation of AHP, The 17th Triennial Conference of the International Federation of Operational Research Societies (IFORS2005), MD-19-4(2005.7)

〔2〕稲嶺和哉、後藤格、篠原正明、大澤慶吉：整合度 CI と倍率誤差δの関係、日本オペレーションズリサーチ学会 2005 年度秋季研究論文集、２－A－６、 pp.148－149 (2005.9)

〔3〕木下栄蔵：入門 AHP、日科技連(2000.12)