

AHPとANPにおける一対比較の高速化

日大生産工 西澤一友

1 はじめに

AHP (Analytic Hierarchy Process) およびANP (Analytic Network Process) では一対比較の数は評価基準数と代替案数の増加に伴い二乗のオーダで増加する。また、AHPでは評価基準の一対比較が不安定となりやすい。そこで本報告では一対比較の数を減らし、さらに評価基準の一対比較をやらないようにAHPを2クラスタANPに置き換えた。ANPでは超行列 S が S^∞ で列ベクトルが収束することを利用したので、超行列は確率行列である必要があった。別の解法として超行列の固有値問題とした方法を使えば超行列は確率行列である必要はなくなる。そこで一対比較行列にかわる評価行列 D を作成し、一対比較の高速化をはかった。

2 評価行列の作成

評価基準数を m 、代替案数を n としたとき、評価行列 D は次のように作成する。まず、評価基準ごとに基準を設定する。次に各代替案が基準をクリアしているか否か、表1のような3段階評価をする。不完全情報の場合にも対応できるように欠落の場合は評価値を1とする。

表1: 代替案の評価値

	評価値
代替案が基準をクリア	2
代替案が基準をクリアしない	0
代替案が基準に関して不明	1

D の要素 d_{ij} は評価基準 i に対する代替案 j の評価値である。

3 ANPにおける高速化

D をもとにして超行列を作成する。AHPに対応する一番単純な2クラスタANPの超行列 S を(1)に示す。ここで W は評価基準からの代替案の評価ウエイト小行列、 V は代替案からの評価基準の評価ウエイト小行列、 0 は零行列である。

$$S = \left[\begin{array}{c|c} 0 & V \\ \hline W & 0 \end{array} \right] \quad (1)$$

通常は、 W 、 V とともに一対比較行列から得られた固有ベクトルを総和1に正規化したものである。ここでは、直接 D を使い、 $V = D$ 、 $W = D^T$ とする。その超行列を(2)に示す。

$$S = \left[\begin{array}{c|c} 0 & D \\ \hline D^T & 0 \end{array} \right] \quad (2)$$

基本的には(2)で良いのだが、 S に零ベクトルとなる列または行が存在する可能性があり、ランクが落ちる。表1で評価値が0とならないようにすればよいが、基準を満足しない評価は0としたほうが間違いがないので表1のとおりとする。そこで、パラメータ $\theta (> 1)$ を用いて(1)を次のようにする。

$$V = v_{ij} = \theta^{d_{ij}} \quad (3)$$

$$W = V^T \quad (4)$$

作成された S は2クラスタの場合、周期2で零小行列の位置が変動するので、 S^2 を計算し、固有値1に対する固有ベクトルを求める。

4 適用例

適用例として評価基準5 ($m = 5$)、代替案6 ($n = 6$) の場合を考える。3段階評価した評価行列 D を

Faster pairwise comparisons in AHP and ANP

Kazutomo NISHIZAWA

以下に示す。

$$D = \begin{bmatrix} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ c_1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ c_2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ c_3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ c_4 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ c_5 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

今回提案した方法による超行列は、(3) で $\theta = 2$ としたとき以下ようになる。

$$S = \left[\begin{array}{cccccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 1 & 4 & 4 \\ \hline 4 & 4 & 4 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (6)$$

S^2 を計算し、固有値 1 に対応する固有ベクトルを求める。得られた結果を表 2 に示す。評価基準、代替案ともに総和 1 に正規化してある。

表 2: 計算結果 ($\theta = 2$)

評価基準	v	代替案	w
c_1	0.164563	a_1	0.197100
c_2	0.249261	a_2	0.169822
c_3	0.209333	a_3	0.147178
c_4	0.132616	a_4	0.137862
c_5	0.244226	a_5	0.177952
		a_6	0.170086

今回提案した方法では、(3) でパラメータ θ を用いている。 θ の値を変えた場合の評価基準の順位を表 3 に、代替案の順位を表 4 に示す。

表 3: θ の値による評価基準の順位

θ /順位	1	2	3	4	5
2.0	c_2	c_5	c_3	c_1	c_4
4.0	c_5	c_2	c_3	c_1	c_4
8.0	c_5	c_2	c_3	c_1	c_4

表 3、表 4 とともに、パラメータの値が $\theta = 2$ の場

表 4: θ の値による代替案の順位

θ /順位	1	2	3	4	5	6
2.0	a_1	a_5	a_6	a_2	a_3	a_4
4.0	a_1	a_6	a_5	a_2	a_3	a_4
8.0	a_1	a_6	a_5	a_2	a_3	a_4

合と $\theta = 2$ より大きい場合では評価基準の順位、代替案の順位は若干変動している。

そこで $\theta = 2$ の場合と $\theta = 8$ の場合の評価基準と代替案についてその評価値を表 5 と表 6 に示す。

表 5: $\theta = 2$ の順位と評価値

c_4	0	2	0	0	0	2
c_1	2	1	0	2	0	1
c_3	2	1	2	2	1	1
c_5	2	2	2	2	2	0
c_2	2	2	2	1	2	2
	a_1	a_5	a_6	a_2	a_3	a_4

表 6: $\theta = 8$ の順位と評価値

c_4	0	0	2	0	0	2
c_1	2	0	1	2	0	1
c_3	2	2	1	2	1	1
c_2	2	2	2	1	2	2
c_5	2	2	2	2	2	0
	a_1	a_6	a_5	a_2	a_3	a_4

表 5 と表 6 より評価基準の順位はクリアしている代替案の数が多いほどウエイトが高くなっていることがわかる。さらに $\theta = 8$ の方が代替案の順序が評価基準のクリア数に即した結果になっている。

5 まとめ

AHP に対応する 2 クラスタ ANP について一対比較の高速化を提案した。しかしパラメータ θ の値により評価基準や代替案の順位が若干変動するため、どの値を使えば適切かさらに検討が必要である。また一対比較を簡易化した手法のため、得られた結果の信頼性の検討が実例をとおして必要である。