不連続・微分不可関数を含む非線形連立方程式の多変数 Goal Seek 機能

日大生産工（院）　○ 川口　博子
日大生産工　篠原　正明

1. はじめに

ExcelのGoal Seek機能とは１変数関数f(x)において、関数値の目標値Goal f_0を与えた下で、f_0=f(x)を満足する変数値x=x_0を見い出すSeek機能である。ここで、関数f(x)は、微分可能である必要はなく、連続である必要もない。Excelのセルにおいて代入文で定義される任意の関数が許容される。このように、既存のGoal Seek機能は一般的な１変数の非線形方程式f_0=f(x)の「逆算」であり、本論文では、本機能を２変数(あるいはそれ以上)に拡張したアドインソフトをVBAにより開発したので、そのアルゴリズムを説明すると共に、実装例を示す。

2. アルゴリズムの検討

1 変数非線形方程式の解法アルゴリズムとしては、Newton 法、単純反復代入(Picard)法、二乗最小化法、はさみ打ち法、等が存在するが、微分不可ならびに不連続関数を含む場合においても 1 つの解への確実な収束性という点から「はさみ打ち法」をベースにした多変数非線形連立方程式の解法アルゴリズム(再帰形解法[1][2][3][4][5])にもとづく多変数 Goal Seek アドインソフトを設計する。

3. 再帰形解法の説明([1][2][3][4][5])

2 変数 Goal Seek 機能は、

$f_0=f(x,y)$　(1)

$g_0=g(x,y)$　(2)

において、2 つの目標値f_0、g_0を満足するように、変数値 x,y を見い出す機能である。同様に、3 変数 Goal Seek 機能は、

$f_0=f(x,y,z)$　(3)

$g_0=g(x,y,z)$　(4)

$h_0=h(x,y,z)$　(5)

において、3 つの目標値f_0、g_0、h_0を満足するように、変数値x、y、zを見い出す機能である。$f_0=g_0=h_0=0$としても一般性を失わないので、各々の場合について、再帰形解法の手順を以下に説明する。

3.1　2 変数 2 方程式の場合

2 つの方程式が 2 つの変数x,yの陰関数で表現される一般的な場合について考える。

$f(x,y)=0$　(6)

$g(x,y)=0$　(7)

もし(7)式が y=G(x)と y について x の陽な関数で表現できれば、y=G(x)を(6)式に代入して、次式を得ることができる。

$f(x,G(x))=0$　(8)

(8)式は 1 つの変数 x のみの関数であり、はさみ打ち法などにより容易に解を求めることができる。しかし、(7)式が常に y=G(x)という陽関数に変形ができないため,一般的な解法として以下の手順で計算を行う。

Multi-variable Goal Seek for discontinuous nonlinear equations

Hiroko KAWAGUCHI† and Masaaki SHINOHARA

Ⅰ.x_l＜x_uで$f(x_l,y_l)$・$f(x_u,y_u)$＜0 かつ$f(x_l,y_l)$＜$f(x_u,y_u)$を満たす区間(x_l,x_u) を用意する。

Ⅱ. x_{new}←$B(x_l,x_u)$　(例えば、$B(x_l,x_u)=(x_l+x_u)/2$)

Ⅲ.もし、$f(x_{new},y_{new})$・$f(x_u,y_u)$＜0 ならx_{new}をx_l、さもなければx_{new}をx_uと置く 。

Ⅳ.区間(x_l,x_u)が十分小さいならば終了し、さもなければⅡへ。

但し、$f(x,y)$の計算は以下のⅤ、Ⅵ、Ⅶに従う。

Ⅴ. $x=x_0$と置く。

Ⅵ. $g(x_0,y)=0$ を満たすyの値を適当な方法で 1 つ計算し、それを$y=y_0$とする。

Ⅶ. $f(x_0,y_0)$を計算する。

3.2　3 変数 3 方程式の場合

$$f(x,y,z)=0 \qquad (9)$$

$$g(x,y,z)=0 \qquad (10)$$

$$h(x,y,z)=0 \qquad (11)$$

同様に以下の手順で計算を行う。

Ⅰ.x_l＜x_uで$f(x_l,y_l,z_l)$・$f(x_u,y_u,z_u)$＜0 かつ$f(x_l,y_l,z_l)$＜$f(x_u,y_u,z_u)$を満たす区間(x_l,x_u)を用意する。

Ⅱ. x_{new}←$B(x_l,x_u)$

Ⅲ.もし、$f(x_{new},y_{new},z_{new})$・$f(x_u,y_u,z_u)$＜0 なら$x_{new}$を$x_l$、さもなければ$x_{new}$を$x_u$と置く 。

Ⅳ.区間(x_l,x_u)が十分小さいならば終了し、さもなければⅡへ。

但し、$f(x,y,z)$の計算は以下のⅤ、Ⅵ、Ⅶに従う。

Ⅴ. $x=x_0$と置く。

Ⅵ. $g(x_0,y,z)=0$

$h(x_0,y,z)=0$

に対して、3.1 節のアルゴリズムを適用し、

$g(x_0,y_0,z_0)=0$

$h(x_0,y_0,z_0)=0$

を満たす$y=y_0$、$z=z_0$を求める。

Ⅶ. $f(x_0,y_0,z_0)$を計算する。

4. インプレメントの例

微分不可・不連続関数を含む以下の 2 変数非線形連立方程式を 2 変数 Goal Seek 機能を使って解く。

例 1.　$f(x,y)=|x|-y$

$g(x,y)=\max\{0.5x+2,-x+3\}-y$

収束値は$x=4$、$y=4$、$f=10^{-4}$、$g=10^{-4}$となり、所望の解を得る。

例 2.　$f(x,y)=x^2+y^2-25$

$g(x,y)=y-\max\{0.5x+2,-x+3-y\}$

$x=-3.708$、$y=3.354$ 、$f=10^{-4}$、$g=10^{-4}$

例 3.　$y^3=4(x^3+1)$

$e^y=e^x+e^{-x}+e^{1/y}+3$

$x=1.059556$、$y=2.061263$

こちらの非線形方程式は技術書からもってきた例を試したものである。x=1.059556、y=2.061263 となり、技術書では x=1.06、y=2.06 となっていることから、所望の解を得ることができたと考えられる。

例 4.　$f(x,y,z)=2x+3y+z-1$

$g(x,y,z)=x-2y+2z+3$

$h(x,y,z)=x+3y-4z-2$

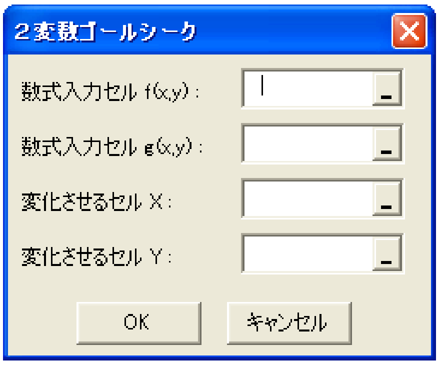
$x=-1$、$y=1$、$z=0$

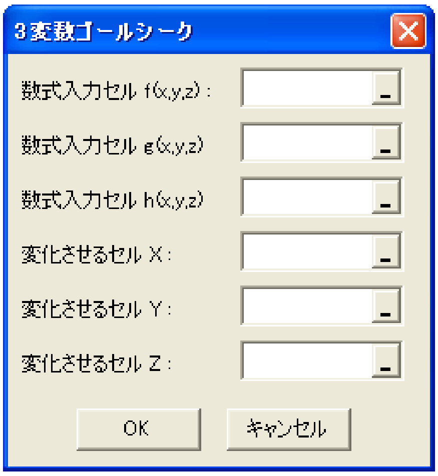
[3 変数ゴールシーク　メインルーチン]

```
Function Main()

  Dim xMax As Double   'はさみうち法の最大値
  Dim xMin As Double   'はさみうち法の最小値
  Dim xNew As Double   '正負判定前の x の一時保存

  Dim yMax As Double   'はさみうち法の最大値
  Dim yMin As Double   'はさみうち法の最小値
  Dim yNew As Double   '正負判定前の x の一時保存
```

```
Dim zMax As Double   'はさみうち法の最大値
Dim zMin As Double   'はさみうち法の最小値
Dim zNew As Double   '正負判定前の x の一時保存

'最大最小値を初期化
xMax = 100
xMin = -100

yMax = 100
yMin = -100

zMax = 100
zMin = -100

For t = 0 To 100 Step 1
  zNew = (zMax + zMin) / 2
  Range(UserForm1.Variable3.Value).Value=
         zNew

  For i = 0 To 100 Step 1
    yNew = (yMax + yMin) / 2
    Range(UserForm1.Variable2.Value).Value=
           yNew

    For j = 0 To 100 Step 1
      xNew = (xMax + xMin) / 2
      Range(UserForm1.Variable1.Value).Value
            =xNew
      Range(UserForm1.FormulaCell2.Value).
      GoalSeek Goal:=0,
      ChangingCell:=Range(UserForm1.
                    Variable1.Value)

       If(Range(UserForm1.FormulaCell1.Value)
       .Value) = 0 Then
         End
       End If

      If(Range(UserForm1.FormulaCell1.Value).
      Value) < 0 Then
        xMin = xNew
      Else
        xMax = xNew
      End If
    Next j

    Range(UserForm1.FormulaCell3.Value).GoalSeek
           Goal:=0,
    ChangingCell:=Range(UserForm1.Variable2.
                 Value)

      If(Range(UserForm1.FormulaCell2.Value).Valu
      e) = 0 Then
        End
      End If

      If(Range(UserForm1.FormulaCell2.Value).Valu
      e) < 0 Then
        yMin = yNew
      Else
        yMax = yNew
      End If
  Next i

  Range(UserForm1.FormulaCell1.Value).GoalSeek
        Goal:=0,
  ChangingCell:=Range(UserForm1.Variable3.Value)

  If(Range(UserForm1.FormulaCell3.Value).Value)=0
  Then
    End
  End If

  If(Range(UserForm1.FormulaCell3.Value).Value)< 0
  Then
```

```
        zMin = zNew
      Else
        zMax = zNew
      End If
    Next t

  End
End Function
```





5. おわりに

インプレメント例からも分かるように、Goal Seek 機能を使い所望の解を得ることができた。非線形連立方程式の解法としては、他にニュートン法やソルバーを使う方法があるが、いずれも微分可能な場合とされている。Goal Seek は直接数値を代入するため 1 変数に直す必要がなく、微分不可能なものや不連続なものを計算できるので大変有意義な手法と考えられる。

6. 今後の課題

今回は例として 2 変数や 3 変数のものをあげてみたが、今後 5 変数や 6 変数といった多変数に拡大し、考えていきたい。また変数の数を指定すると再帰的解法で解けるように改良していきたいと思う。その他、初期設定、複数解対策などインプレメントの向上を図っていきたいと思う。

7. 参考文献

[1]篠原正明：非線形最小 2 乗法による需要予測曲線のパラメータ推定法、統計数理研究所共同研究リポート 53、最適化：モデリングとアルゴリズム 4、pp.216-241(1994.2).

[2]篠原正明：時間価値変換写像による設備投資計画・評価のモデル、統計数理研究所共同研究リポート 61、最適化：モデリングとアルゴリズム 5、pp.159-179(1994.10).

[3]留田慎一朗、篠原正明：はさみうち法による非線形連立方程式の解法、第 33 回学術講演会数理部会講演概要、pp19-20(2000.12).

[4]島村智晃、篠原正明：黄金分割法を用いた非線形連立方程式の解法アルゴリズムの提案、第 34 回学術講演会数理部会講演概要、 pp.19-20(2001.12).

[5]川口博子、篠原正明：非線形連立方程式の再帰形解法、第 35 回学術講演会数理情報部会講演概要、pp.67-70(2002.12).

[6]川口博子、篠原正明、安藤真人：多変数 Goal Seek 機能アドインソフトのインプレメント、日本オペレーションズ・リサーチ学会、2005 年秋季研究発表会、pp.162-163(2005.9).