凸包モデルの CCR モデルならびに相対効率モデルに基づく解釈

日大生産工　　○篠原正明
情報システム研究所　　篠原健

1．はじめに

BCC モデルの凸結合条件　eλ＝1 を上下限制約条件 L≤eλ≤U　に緩和した凸包モデルについて、それの CCR モデルならびに相対効率モデルにもとづく解釈を与える。

2．BCC モデルから凸包モデルへ

入力指向型 BCC モデルの LP 定式化は、(1)～(5)で与えられる。

min θ (1)

制約式 $\theta x_0 \geq X\lambda$ (2)

$y_0 \leq Y\lambda$ (3)

$e\lambda = 1$ (4)

$\lambda \geq 0$ (5)

(4)式の凸結合条件を(9) 式の上下限制約で置換した DEA モデルを入力指向型凸包モデルと呼ぶ。これの LP 定式化は(6)～(10)で与えられる。

min θ (6)

制約式 $\theta x_0 \geq X\lambda$ (7)

$y_0 \leq Y\lambda$ (8)

$L \leq e\lambda \leq U$ (9)

$\lambda \geq 0$ (10)

3．凸包モデルのＬＰの双対問題と分数計画問題

凸包モデルのＬＰ定式化(6)～(10)を主問題とするならば、双対問題のＬＰ定式は(11)～(14)で与えられる。

Max $z = Lu_{01} - Uu_{02} + u^T y_0$ (11)

制約式 $v^T x_0 = 1$ (12)

$-v^T X + u^T Y + e(u_{01} - u_{02}) \leq 0$ (13)

$v \geq 0, u \geq 0, u_{01} \geq 0, u_{02} \geq 0$ (14)

あるいは、分数計画問題として(15)～(17)で定式化できる。

$$\max \quad \frac{Lu_{01} - Uu_{02} + u^T y_0}{v^T x_0} \qquad (15)$$

$$\text{制約式} \frac{u_{01} - u_{02} + u^T y_j}{v^T x_j} \leq 1 \ (j = 1, \cdots, n) \qquad (16)$$

$v \geq 0, u \geq 0, u_{01} \geq 0, u_{02} \geq 0$ (17)

4．CCR モデルに基づく解釈

分数計画問題(15)～(17)において、以下の係数、変数変換(18)～(23)を考えよう。

$$Y_0 = \begin{bmatrix} L \\ -U \\ y_0 \end{bmatrix} \qquad (18)$$

$$X_0 = x_0 \qquad (19)$$

$$Y_j = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ y_j \end{bmatrix} \quad (j = 1, \cdots, n) \qquad (20)$$

$$X_j = x_j \quad (j = 1, \cdots, n) \qquad (21)$$

$$U = \begin{pmatrix} u_{01} \\ u_{02} \\ u \end{pmatrix} \qquad (22)$$

$$V = v \qquad (23)$$

Interpreting Convex Envelopment Model based on CCR Model and Relative Efficiency Model

Masaaki SHINOHARA and Ken SHINOHARA

ここで、（18）式の U は上限値、（22）式の U はベクトルであり、本来は別記号とすべきだが、同じ記号を以下用いる。

これらの新しいベクトル Y_0, X_0, Y_j, X_j, U, V を用いて、分数計画問題(15)～(17)を書き直すと、(24)～(26)を得る。

$$\max \quad \frac{U^T Y_0}{V^T X_0} \qquad (24)$$

制約式 $$\frac{U^T Y_j}{V^T X_j} \le 1 \quad (j = 1, \cdots, n) \qquad (25)$$

$$V \ge 0, U \ge 0 \qquad (26)$$

(24)～(26) は入力データ X_j ,出力データ Y_j を持つ DMU $_j$ $(j = 1, \cdots, n)$ を比較対象とし、入力データ $X_{0,}$ 出力データ Y_0 を持つ DMU $_0$ の効率性を評価する入力指向型 CCR モデルと見ることができる。

普通の CCR モデルと異なる点は以下の 2 点である。

(ｉ) (20)式より、$Y_j = \begin{bmatrix}1, & -1, & y_j^T\end{bmatrix}^T$ であり、出力データベクトルの第一要素として、DMU $_j$ が存在することに対するポジティブ要因として 1、第二要素としてネガティブ要因として-1 が被比較対象全 DMU に対して共通に付与されている。

一般に DEA 分析においては、データ値は正値を仮定するが、この仮定はここでは満たされない。

(ⅱ)注目 DMU $_0$ の出力データベクトル Y_0 は(18)式で与えられる。すなわち、効率性評価を行う DMU $_0$ の出力データベクトルの第一、二要素は L, $-U$ であり、ポジティブ要因項目の重みとネガティブ要因項目の重みを L と U により、$0 \le L \le 1 \le U$ の範囲で任意に付与できる。

すなわち、目的関数の DMU データは制約条件中の DMU データに含まれる必要はない。

ここで、BCC モデルでは、(ｉ)と(ⅱ)の相違点は存在しない。すなわち、BCC モデルでは、{DMU $_j$ $(j = 1, \cdots, n)$ } 群の中に入出力データが一致する DMU $_0$ が必ず存在した。又、BCC モデルでは、出力項目の付加項目数は 1 つであるが、対応する評価変数 u_0 は自由変数である。

５．相対効率モデルに基づく解釈

CCR モデルの分数計画問題(24)～(26)は、以下の相対効率モデル定式化(27),(28)と等価である。

$$\max \qquad r_0 = \frac{\dfrac{U^T Y_0}{V^T X_0}}{\max\limits_{j} \left\{ \dfrac{U^T Y_j}{V^T X_j} \right\}} \qquad (27)$$

$$U \ge 0, V \ge 0 \qquad (28)$$

4 章と同様に普通の相対効率モデルとの相違点は、Y_j, Y_0 に 2 つのデータ項目が固定的に割り当てられたおり、かつ、$Y_j \quad (j = 0)$ と Y_0 が必ずしも同一でない点である。

６．おわりに

CCR モデルないしは相対効率モデルに基づく解釈から判明したことは、凸包モデルは、フロンティアを形成する DMU 群{DMU $_j$ $(j = 1, \cdots, n)$ }の中に評価対象 DMU $_0$ と一致するものが存在するとは限らない一種の超効率モデル(あるいは排他モデル)と解釈できる。但し、凸包モデルの効率値は $L = U = 1$ の場合の BCC モデルのそれ以下であるので、超効率(super efficiency)よりは、排他(exclusive)の方の表現法が妥当だろう。このことより、分数 CCR モデルの制約式（２５）の添字ならびに相対効率値（２７）分母の MAX の添字に 0 を付加して、j = 0,1,…,n とすることにより、排他的でないモデルとしての解釈も可能である。又、入力指向型では出力項目に各 DMU 自身の存在に対する正要因と負要因の定型データ（1 と－1）が内包されたモデルで、さらに、注目する比較対象 DMU $_0$ はそのデータが L と $-U$ を持つ、と解釈できる。ここで、出力項目の負要因がわかりにくければ、多少乱暴ではあるが、入力項目での正要因(－1 は＋1, $-U$ は $+U$)と考えればよい。