

BCC モデルにもとづく学生成績評価

日大生産工（院） 金子 隆史
日大生産工 篠原 正明
日大生産工 大澤 慶吉

1. はじめに

経営効率性を調べる方法として用いられる「DEA(包絡分析法)」を学生の成績評価に用いる。入力項目に勉強時間、出力項目に各テストの点数とし、各 DMU の効率性を 1 入力 5 出力という観点から分析する。今回適用するモデルは BCC-I モデル(入力指向型)であり、その結果の RTS(Returns to Scale)に着目し、学生の学習効率性の規模の効率性を考察する。

2. 規模の効率性

BCC モデルの双対問題は

$$\langle DBCC_0 \rangle \quad \max z = u^T y_0 - u_0 \quad (1)$$

$$\text{制約式} \quad v^T x_0 = 1 \quad (2)$$

$$-v^T X + u^T Y - u_0 \leq 0 \quad (3)$$

$$v \geq 0, \quad u \geq 0 \quad (4)$$

となる。ただし、 $u_0 = -u_{01} + u_{02}$ であり、この変数には符号制約は付かない。この u_0 の符号と、DMU₀ の規模の効率性の間には密接な関係がある。

活動 (x_0, y_0) が効率的であるから上の LP の最適解を (z^*, v^*, u^*, u_0^*) とすれば $z^* = 1$ である。

ここで、 δ を絶対値が非常に小さい数として点 $P_\delta = ((1 + \delta)x_0, (1 + \delta)y_0)$ を考えると、この点は活動 (x_0, y_0) にきわめて近い点である。この点が BCC モデルの生産可能集合 $P = \{(x, y) \mid x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, e\lambda = 1, \lambda \geq 0\}$ に属するか否かで (x_0, y_0) の規模の効率性を次のように定義する。

(a) $\delta^* > 0$ が存在し、 $\delta^* > \delta \geq 0$ である任意の δ に対して $P_\delta \in P$ であり、かつ、 $-\delta^* < \delta < 0$ であるどの δ に対しても $P_\delta \notin P$ であるときも活動 (x_0, y_0) は規模の効率性が増加型であるという。

(b) $\delta^* > 0$ が存在し、 $\delta^* > |\delta|$ であるどんな δ に対しても $P_\delta \in P$ であるか、または

$\delta^* > |\delta| > 0$ であるどんな δ に対しても $P \notin P$ であるとき、活動 (x_0, y_0) は規模の効率性が一定であるという。

(c) $\delta^* > 0$ が存在し、 $\delta^* > \delta > 0$ である任意の δ に対して $P_\delta \notin P$ であり、かつ、 $-\delta^* < \delta \leq 0$ であるどんな δ に対しても $P_\delta \in P$ であるとき、活動 (x_0, y_0) は規模の効率性が減少型であるという。

3. 解析内容

本研究では、生徒 20 人を対象に DEA を用いて、勉強時間を入力とし、数学の 5 つの単

元を出力とし、BCC-I モデルで解析して、それぞれの生徒の効率性を評価する。20 人の勉強時間と 5 単元の点数を下の表 1 に示す。なお、今回のデータは実データに操作を加え、架空の生徒を想像して作った仮想のデータである。

表 1 仮想データ

| 生徒 | (○)勉強時 | (○)計算 | (○)文章題 | (○)確率 | (○)関数 | (○)図形 |
|----|--------|-------|--------|-------|-------|-------|
| A | 4 | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 |
| B | 1 | 16 | 5 | 5 | 10 | 0 |
| C | 3 | 20 | 15 | 20 | 15 | 18 |
| D | 1 | 8 | 5 | 15 | 5 | 0 |
| E | 1 | 12 | 18 | 5 | 8 | 10 |
| F | 0.5 | 16 | 5 | 5 | 5 | 20 |
| G | 1 | 20 | 3 | 20 | 5 | 5 |
| H | 0.5 | 4 | 0 | 5 | 18 | 0 |
| I | 2 | 12 | 5 | 10 | 20 | 5 |
| J | 0.5 | 4 | 5 | 0 | 0 | 5 |
| K | 2 | 20 | 20 | 20 | 15 | 18 |
| L | 1 | 16 | 15 | 10 | 10 | 15 |
| M | 1.5 | 20 | 0 | 5 | 20 | 5 |
| N | 5 | 20 | 20 | 20 | 15 | 20 |
| O | 1 | 8 | 5 | 10 | 10 | 5 |
| P | 2 | 16 | 15 | 20 | 15 | 15 |
| Q | 1.5 | 12 | 5 | 15 | 10 | 10 |
| R | 1 | 16 | 10 | 15 | 20 | 10 |
| S | 0.5 | 4 | 10 | 5 | 5 | 0 |
| T | 1 | 20 | 0 | 5 | 5 | 5 |

4. 解析結果

仮想データに対する解析結果を表 2, 3 に示す。

表 2 RTS([1]のソルバー)

| DMU | Score | RTS | RTS of Projected DMU |
|-----|-----------|------------|----------------------|
| A | 1 | Decreasing | |
| B | 0.6666667 | | Constant |
| C | 0.6666667 | | Decreasing |
| D | 0.8333333 | | Constant |
| E | 1 | Constant | |
| F | 1 | Constant | |
| G | 1 | Constant | |
| H | 1 | Constant | |
| I | 0.5 | | Constant |
| J | 1 | | Constant |
| K | 1 | Decreasing | |
| L | 1 | Decreasing | |
| M | 1 | Decreasing | |
| N | 0.8 | | Decreasing |
| O | 0.6854376 | | Constant |
| P | 1 | | Decreasing |
| Q | 0.5925926 | | Constant |
| R | 1 | Constant | |
| S | 1 | Constant | |
| T | 1 | | Constant |

表 3 RTS([2]のソルバー)

| DMU Name | Input-Oriented | Stability Region | |
|----------|----------------|------------------|-------------|
| | RTS | Lower Bound | Upper Bound |
| A | Decreasing | 0.43750 | 1.00000 |
| B | Decreasing | 0.84536 | 1.00000 |
| C | Decreasing | 0.60845 | 1.00000 |
| D | Increasing | 1.00000 | 1.03191 |
| E | Constant | 1.00000 | 1.00000 |
| F | Constant | 1.00000 | 1.00000 |
| G | Constant | 1.00000 | 1.00000 |
| H | Constant | 1.00000 | 1.00000 |
| I | Decreasing | 0.82828 | 1.00000 |
| J | Increasing | 1.00000 | 2.68565 |
| K | Decreasing | 0.44872 | 1.00000 |
| L | Decreasing | 0.53846 | 1.00000 |
| M | Decreasing | 0.53600 | 1.00000 |
| N | Decreasing | 0.43750 | 1.00000 |
| O | Increasing | 1.00000 | 1.61364 |
| P | Decreasing | 0.63636 | 1.00000 |
| Q | Constant | 1.00000 | 1.00000 |
| R | Constant | 1.00000 | 1.00000 |
| S | Constant | 1.00000 | 1.00000 |
| T | Decreasing | 0.80000 | 1.00000 |

5. まとめ

まず 2 つのソルバーで解析した結果、それぞれのソルバーが示した、RTS は一意ではない。例えば、DMU D は表 2 では Constant だが、表 3 では Increasing である。また、DMU B は表 2 では Constant だが、表 3 では Decreasing である。しかし一方のソルバーで Increasing のものがもう一方のソルバーでは Decreasing と評価されることはない。これらは 2 つのソルバーでどこを境界にして判断するかが異なっているからで、こういった曖昧性は残る。

次にここで Increasing と判断された DMU は発達途上の学生で、Constant と判断された DMU は伸び盛りの学生で、Decreasing と判断された DMU は成熟状態の学生と分類できる。ただ、今回は仮想データで行ったものなので、実データに基づく分析、検証は今後の課題である。

参考文献

- [1] 刀根薫, 経営効率性の測定と改善, 日科技連 (1993)
- [2] Joe zhu, Quantitative Models for Performance Evaluation and Benchmarking, Kluwer Academic Publishers(2003)