# 1つの予備ユニットを持つ1ユニットシステムの確率的挙動解析

日大生産工　　　○　内田　正則

## 1．まえがき

ペトリネット（Petri net、以下 PN と記す）は、システムにおける信号あるいは情報の流れを抽象化し、簡潔に表現できるモデルとして注目されている。PN の図形的表現を利用することにより、システム中の事象の順序関係と状態の推移を視覚的に把握することができる。特に、順序関係の複雑な非同期並列システム、並列に生起進行するシステム、分散処理システムの制御などについて PN を利用すると、システムの複雑な動作が簡潔に表現することができる。

一般に、複雑な動作をするシステムを取り扱う場合には、マルコフモデルでは状態グラフを表現することが複雑になる。本報告では、1つの予備ユニットを持つ1ユニットシステムの故障、修理、予備保全を考慮した場合のシステムの挙動を PN 表現し、マルコフ再生過程（Markov renewal process,以下 MRP と記す）によりシステムの信頼性を評価する尺度として、単位時間あたりの状態訪問期待回数 M j (the expected numbers of visits to state j)、平均初通過時間 H(the mean first-passage time for state j)、極限確率 P(limiting probabilities) を求める。

更に、信頼性システムを PN によってモデル表現することの有効性、および PN 表現されたシステムの確率的挙動解析をするために、どのように MRP を適用するかについて述べる。

## 2．システムの PN 表現

ここでは、故障、修理、予防保全を考慮した1ユニットシステムの PN 表現された動作を理解するために PN の概説をすると共に、PN 表現されたシステムの到達可能木について述べる。PN は、システムにおける条件と対応づけられる位置（place）の集合、システム中の事象に対応づけられる転位（transition）の集合、およびそれらの条件と事象の関係を表す有向線分（directed arc）とにより構成され、位置に刻印、つまりマーキング（marking）を与えることにより、そのシステムのある状態を表す。PN の N は、次の4つの組で定義される二部有向グラフであり

$$N=<E, T, A, M_0> \tag{1}$$

として表される。ただし、

$$E=\{\varepsilon_i \mid 1 \leqq i \leqq |E|\} \tag{2}$$

$$T=\{\tau_j \mid 1 \leqq j \leqq |T|\} \tag{3}$$

であり、E は有限個の位置 $\varepsilon_i$ の集合で○印で記述し、T は有限個の転位 $\tau_j$ の集合｜印で記述される。A は有限個の有向線分の集合で、位置 $\varepsilon_i$ から転位 $\tau_j$ への有向線分の部分集合と、転位 $\tau_j$ から位置 $\varepsilon_i$ への有向線分の部分集合とで構成される。集合 A に属する有向線分で、位置 $\varepsilon_i$ から転位 $\tau_j$ へ向かう有向線分があるとき、位置 $\varepsilon_i$ を転位 $\tau_j$ の入力位置と呼び I（$\tau_j$）で表す。次に集合 A に属する有向線分で、転位 $\tau_j$ から位置 $\varepsilon_i$ へ向かう有向線分があるとき、位置 $\varepsilon_i$ を転位 $\tau_j$ の出力位置と呼び O（$\tau_j$）で表す。

---

Analysis of Probable Behavior of One Unit System with a Spare Unit

Masanori　UCHID

よって有向線分を→で示し、入力位置Ｉ（$\tau_j$）にある。●印で示される標号（token）を転位の発火（fire）により出力位置Ｏ（$\tau_j$）に置くことで刻印がなされてシステムの状態を捉える。ここで、式（１）におけるＭｏは、初期刻印と呼ばれシステムの初期状態の設定により決定される。ここで、故障、修理、予防保全を考慮した１ユニットシステムをＰＮ表現すると図１になる。図１は、１ユニットからなるシステムの故障、修理、予防保全を考慮した１ユニットシステムのＰＮである。図１は、１つのユニットの稼動（operating）がシステムの使命を完全に満足するシステムである。更に、１つの予備ユニット(spare unit)を持っているのが特徴である。このようなシステムは、システムダウンが許されないシステムに良く見られる方式である。１つのユニットの長時間運転から生ずる突発的な故障を未然に防止するためにユニットに予防保全を施し、且つ取り替え用

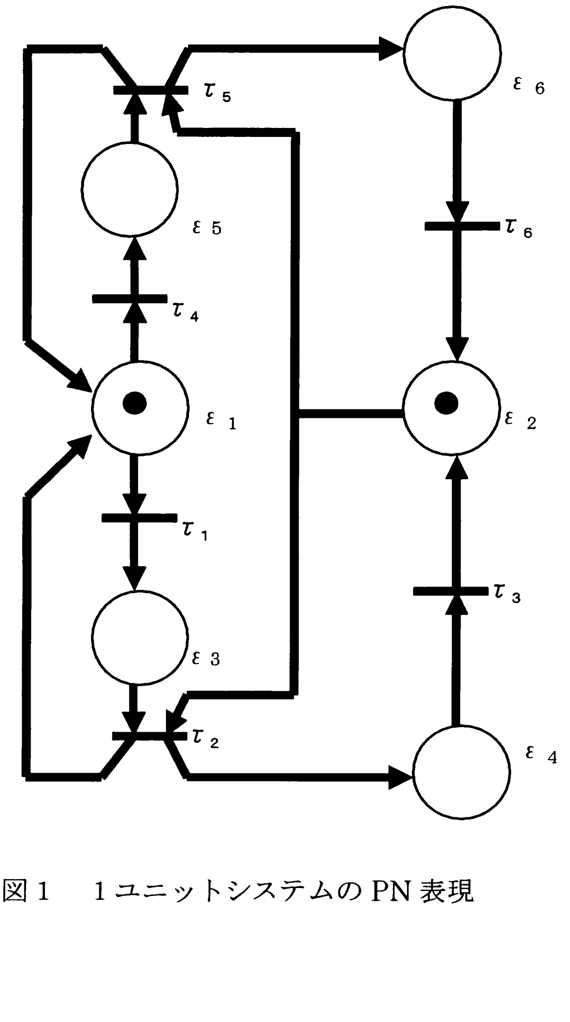


図１　１ユニットシステムの PN 表現

の予備ユニットが待機しているので故障や予防保全によるシステムダウンを最小時間で回避することを目的としたシステムとなる。

図１における各転移$\tau_j$（ $j=1,2,\cdots,6$）および各位置$\varepsilon_i$（$i=1,2,\cdots,6$）の意味は次の通りである。

$\tau_1$：稼動ユニットの故障

$\tau_2$：稼動ユニットの故障による取替え

$\tau_3$：故障ユニットの修理

$\tau_4$：稼動ユニットに予防保全を受けさせる為の停止

$\tau_5$：予防保全を受けさせる為のユニットと予防ユニットの取替え

$\tau_6$：予防保全受ける為のユニットへ予防保全

$\varepsilon_1$：ユニットの稼動

$\varepsilon_2$：予備ユニットの待機

$\varepsilon_3$：稼動ユニットの故障

$\varepsilon_4$：故障ユニットの修理待ち

$\varepsilon_5$：稼動ユニットに予防保全を受けさせる為の停止

$\varepsilon_6$：予防保全を受ける為のユニットの予防保全待ち

ここで、図１におけるＥそしてＴは

$$E=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6) \quad (4)$$

$$T=(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \tau_6) \quad (5)$$

である。よって、ＡはこのＥとＴの要素である位置と転移を連絡する有向線分の集合となる。また、初期状態として１つのユニットが正常に稼動し、他の１つの予備ユニットが正常に待機しているものとする（図１参照)。　従って、ＰＮにおける標号は、$\varepsilon_1$，$\varepsilon_2$にそれぞれ１個ずつ割り当てられる。このときベクトル表示されるＭｏの要素は、それぞれＥの要素に置かれた標号の個数に対応する。つまり

$$Mo=(1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \quad (6)$$

となる。ここで図１が何らかの原因で故障した場合と、図１に予防保全を施す場合について述べる。

故障の場合は$\tau_1$が発火し、$\varepsilon_1$の標号が$\varepsilon_3$に移動する。つまり

$$M_1 = (0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \quad (7)$$

となる。また予防保全を施す場合は$\tau_4$を発火させ、$\varepsilon_1$の標号を$\varepsilon_5$に移動させる。つまり

$$M_3 = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0) \quad (8)$$

となる。次に、システムをＰＮでモデル化した後に、モデルの動的変化、つまりシステムの挙動を把握する方法として到達可能木がある。到達可能木における木の開始節点に初期刻印を置き、木の節点は刻印、木の枝は刻印間の直接到達可能であることを示す。

そこで、図１のＰＮ表現を到達可能木を用いて記述すると図２となる。

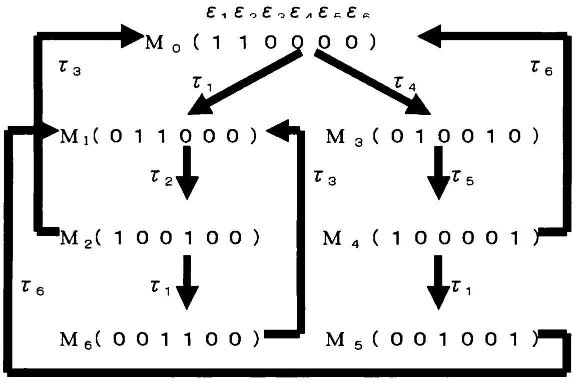


図２　　図１の到達可能木

## ３．ＭＲＰによるシステムの確率的挙動解析

ＰＮ表現された１ユニットシステムをモデルとした確率的挙動をＭＲＰの適用により極限確率を求める。ＰＮの特質として１つの転位が発火すると、その入力位置にある総ての標号が取り去られて出力位置にある総ての位置に標号が割り当てられる。従って、転位が発火することにより入力位置にあった標号を出力位置に移動させることでシステムの動作を標号の動きに代表させてＭＲＰにおける状態を定義することは出来ない。つまり、図１は、各転位および各位置間の静的な連絡関係を示したに過ぎない。

そこで、図１の中の標号を位置に置く（または移動）ことで示される刻印の変化でシステムのある状態を表すことにすればＭＲＰの適用が可能である。つまり、各転位が発火する時点に着目し、刻印によってシステムの状態を表すことになる。

従って、図２の到達可能木を作成することが重要であり、図２における$M_i$（$i = 1, 2, \cdots, 6$）をシステムの状態として定義すれば、同じ状態を同時に生起することはない。次に、時刻$t = 0$で状態$S_i$（$i = 0, 1, 2, \cdots, 6$）に推移した後に、時刻$t$までに転位$\tau_j$（$j = 1, 2, \cdots, 6$）が発火するまでの時間を発火時間分布とする。

ここで、$\tau_1$の発火時間分布、つまり正常に稼動しているユニットが故障するまでの故障時間分布は、$F(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$に従うものとする。それぞれの転位の発火時間分布を次のような時間分布に従うものとする。

$\tau_2$は、$C_R(t) = 1 - \exp(-\beta_1 t)$とし故障したユニットの取替え時間である。

$\tau_3$は$R(t) = 1 - \exp(-\delta_1 t)$とし故障したユニットの修理に要する時間である。$\tau_4$は、$A(t)$とし正常に稼動したユニットに予防保全を定期的に施すものとする。つまり定時予防保全方策として時間$t_0$まで正常に稼動したユニットに予防保全を施すものとし、

$$A(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t \geqq t_0 \end{cases} \qquad (9)$$

となる。

$\tau_5$は、$C_p(t) = 1 - \exp(-\beta_2 t)$とし予防保全を受けるために停止させたユニットと予備ユニットを取替えに要する時間である。

次に、PN 表現されたシステムが各状態$S_i$（$i = 0, 1, 2, \cdots, 6$）に推移する時点を定義し、各時点に対応する状態を定義する。

状態$S_0$：ユニットが稼動している。予備ユニットは待機している。状態$S_1$：稼動しているユニットが故障している。予備ユニットは待機している。状態$S_2$：故障ユニットと予備ユニットが取り替えられる、予備ユニットが稼動している。故障ユニットは修理待ちしている。
状態$S_3$：予防保全を施すために稼動していたユニットが停止している。状態$S_4$：予防保全を受けるユニットと予備ユニットが取り替えられ、予備ニットが稼動している。予防保全を受けるユニットは予防保全待ちしている。
状態$S_5$：予防保全を受けるユニットが予防保全待ちしている時に、稼動しているユニットが故障する（システムダウンとなる)。状態$S_6$：故障ユニットが修理待ちしているとき、稼動している予備ユニットが故障する（システムダウンとなる)。　以上の状態で定義したモデルの挙動の状態推移は図３となる。 図３において状態５と状態６は非再生点であることを示す。

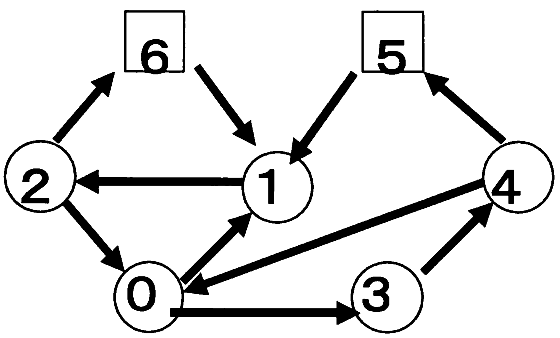


図３　モデルの挙動の状態推移図

ここで、故障したユニットの修理あるいは予防保全を受けたシステムは新品同様であるとする。予備ユニットが待機してない場合は、故障ユニットの取替えは行われない。つまり、故障したユニットの修理を優先的に行い、１つのユニットになるべく早く待機の状態にする必要がある。従って、故障したユニットあるいは予防保全を施す修理人は一人である。

一般的に、状態から状態への遷移の発火は瞬間的かつ完全に行われるものとする。更に、時間は連続的な変数であるから、二つ以上の状態が同時に生起する確率はゼロとなり、同時に二つの遷移の発火は起きない。

このように定義されたシステムは一般的に、ＭＲＰによりシステムの確率的挙動解析がなされる。

## ４．おわりに

本報告では、１つの予備ユニットを持つ１ユニットシステムの確率的挙動を取り上げて、システムの動作を簡潔に表現し記述する方法である PN に MRP を適用して、システムの確率的挙動を極限確率等求めて明らかにした。

そのためには、PN 表現されたシステムの各転位が発火する時点に着目し、刻印によって状態を定義するので到達可能木を作成する必要がある。更に、状態を再生点と非再生点とに区別して定義することにより、システムの挙動をより適確に捉えることが出来る。

その結果、並列的な挙動をするシステムで、かつ非同期的な処理システムのように複雑な挙動をするシステムに対して PN 表現が有用であるならば、本報告で指摘したように状態を再生点と非再生点とに区別して定義することができる MRP を用いてシステムの確率的挙動を解析することは有用であろう。

更に、数値例において時間の概念を導入して極限確率と時間との関係により、システム全体の流れや制御を考慮してシステムを運用することが重要であると考えている。