有限要素法による血流シミュレーション

日大生産工 (学部)　○藤田　翔
日大生産工 (院)　相磯　友宏
日大生産工　角田　和彦

1．緒言

血管疾患、特に動脈瘤が原因であるものは、最近の日本人の死因の上位を占めている。動脈瘤とは、動脈にできるこぶ状のふくらみで、血管が脆くなると発症しやすい疾患である。その一つである真性動脈瘤は、主に動脈硬化により動脈の一部が徐々に拡大したもので、血管の分岐部分に出来ることが多い。この動脈瘤は小さいうちは目立った症状も無いが、拡大すると内臓の圧迫を起こし、一度破裂や解離を起こすとくも膜下出血を発生したりするため、後の生存率は低くなる [1][2]。

動脈瘤の摘出手術は心臓を一時的に止めるなど身体に大きな負担を強いるもので、そのタイミングの決定は古くから臨床医の悩みの種であった [1]。そこで、数値解析により血管の分岐点での流れ、動脈瘤の有無による圧力挙動の違いを理解し、破裂の兆候を読み取ることが出来れば、実際の臨床場面に生かすことが出来るのではないかと考えられている [3]。

本論文では、具体的なモデルとして脳大動脈の分岐部分の簡易モデルを作成し、3 次元非圧縮性 Navier-Stokes 方程式を対象に、指数関数型 Petrov-Galerkin 法を適用し、血管内の血流挙動を解析、理解することを目指す。なお、本研究では計算負荷軽減のため、血管壁を剛体として扱っている。

2．基礎微分方程式

非圧縮性粘性流体の問題に対する基礎微分方程式は、Navier-Stokes 方程式、及び連続の式によって与えられる。これらの式の時間微分項に対し Fractional step 法を利用すると、形式的に以下の方程式系を得る。

$$\dot{u}_i(\tilde{u}_i, u_i^n) + u_j u_{i,j} = \frac{1}{Re} u_{i,jj} \tag{1}$$

$$\dot{u}_i(u_i^{n+1}, \tilde{u}_i) = -p_{,i}^{n+1} \quad , \quad u_{i,i}^{n+1} = 0 \tag{2}$$

ただし、u_i は無次元化された速度ベクトル成分、p は圧力、Re はレイノルズ数、$\tilde{u}_i$ は修正速度ベクトル成分、$(\cdot)$ は時間変数に関する微分、(,) は空間変数に関する偏微分、n は時間 step 数を表す。

また、圧力場に関する式 (2) の時間積分に関し、Euler の前進差分近似を用い、修正速度ポテンシャル ϕ を導入すると次式を得る。

$$u_i^{n+1} = \tilde{u}_i + \phi_{,i} \tag{3}$$

ここで、得られた式の発散をとれば、式 (3) は次式となる。

$$\phi_{,ii} = -\tilde{u}_{i,i} \tag{4}$$

3．指数関数型 Petrov-Galerkin 有限要素法

高レイノルズ数の流れ解析に対しても安定した数値解を得るために、式 (1) に指数関数型の重み関数を用いた Petrov-Galerkin 法に基づく有限要素スキームを適用する [4]。式 (1) の重み付き残差表現に Gauss の発散定理を適用すれば、次の弱解表現を得る。

$$\int_{\Omega_e} \{\dot{u}_i + u_j u_{i,j}\} M_\alpha d\Omega + \int_{\Omega_e} \frac{1}{Re} u_{i,j} N_{\alpha,j} d\Omega = \int_{\Gamma_e} \frac{1}{Re} u_{i,j} N_\alpha n_j d\Gamma \tag{5}$$

ただし、Ω_e は全体領域 Ω の部分領域、Γ_e は部分領域 Ω_e の境界、n_j は外向き単位法線ベクトル成分を表す。また、N_α は 3 次元形状関数で、M_α は指数関数型の重み関数で次式となる。

$$M_\alpha(x) = \sum_{\epsilon,i} N_\alpha(x) e^{-a_i(N_\epsilon x_i^\epsilon - x_i^\alpha)} \tag{6}$$

$$a_i = \frac{\alpha_i}{|L_i|} sgn(v_i) \tag{7}$$

Blood Flow Simulation by The Finite Element Method

Shou FUJITA , Tomohiro AISO and Kazuhiko KAKUDA

ただし、v_i は Ω_e 内で平均化された速度ベクトル成分、L_i は代表長さ、$sgn()$ は符号関数、α_i は上流化の割合を決定するスケーリングパラメータである。

ここで、未知関数の要素内補間を行い、時間進行スキームとして 2 次精度の Adams-Bashforth 法を適用すると次式を得る。

$$M_{\alpha\beta}\frac{\tilde{u}_{i\beta}-u^n_{i\beta}}{\Delta t}=\frac{1}{2}(3F^n_{i\alpha}-F^{n-1}_{i\alpha}) \quad (8)$$

ただし、$F^n_{i\alpha}$ は 次の様に定義される。

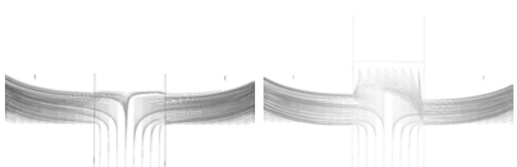
$$F_{i\alpha}=-(K_{\alpha\beta}+D_{\alpha\beta})u_{i\beta}+f_{i\alpha} \quad (9)$$

4．数値計算例

本研究で対象とした解析領域として、計算に用いた正常な血管の有限要素メッシュは、総節点数 98,927、総要素数 92,000 の 3 次元メッシュを、真性動脈瘤のある血管の有限要素メッシュは、総節点数 109,861、総要素数 101,840 の 3 次元メッシュを作成した。また、要素は全て 8 節点 6 面体要素を用いている。

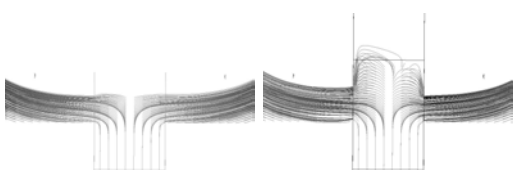
2 種類のモデルにおいて、それぞれ Re=10^2、10^3 の場合の解析を行った。計算条件は、Re=10^2 の場合は $\Delta t = 0.005$、α_i=0.10、T=0〜10 で、Re=10^3 の場合は $\Delta t = 0.002$、α_i=0.50、T=0〜10 で計算を行った。

正常な血管及び動脈瘤のある血管の各々について、図 1〜2 は流線図、図 3〜4 は圧力図を、それぞれ Re=10^2、10^3 について示したものである。



(a) 正常な血管　(b) 動脈瘤のある血管

図 1: 流線図 Re=10^2(T=10)

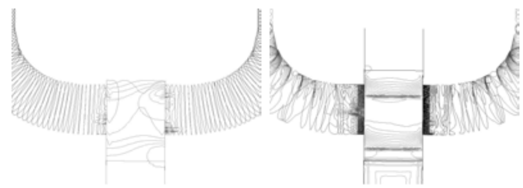


(a) 正常な血管　(b) 動脈瘤のある血管

図 2: 流線図 Re=10^3(T=10)

(a) 正常な血管　(b) 動脈瘤のある血管

図 3: 圧力図 Re=10^2(T=10)



(a) 正常な血管　(b) 動脈瘤のある血管

図 4: 圧力図 Re=10^3(T=10)

5．結言

脳大動脈の分岐モデル内の血流に関する有限要素解析結果を、AVS による可視化を通じ 3 次元的に様々な角度から流れを検証する事で、血管内に生じる流れの挙動や圧力の様子を示してきた。正常な血管内での流れ、圧力分布は一様であるが、動脈瘤のある血管内では動脈瘤付近で流れの乱れが生じ、不規則な圧力挙動が現れていることが分かった。

今後の課題は、まだスケーリングパラメータ、レイノルズ数の値などがモデルに対して適切でないため、それらのパラメータの検討を重ねたい。また、節点と要素の関係から流入側の血管壁を四角形としてモデリングせざるを得なかったため、実際の血管の形状に近づけていきたい。

参考文献

[1] J.A.Elefteriades,”腹部大動脈瘤”, 日経サイエンス,(2005/11),pp82-90

[2] Marie Oshima,”A New Approach to Cerebral Hemodynamics - Patient-Specific Modeling and Numerical Simulation of Blood Flow and Arterial Wall Interaction -”,iacm expressions,(16/04),pp4-9

[3] 姫野龍太郎,”生体シミュレーションと医工学プロジェクト”, 日本機械学会誌,(2004-5),pp56-59

[4] 角田和彦・登坂宣好,”非定常非圧縮粘性流れ問題の指数関数型 Petrov-Galerkin 有限要素法”, 日本建築学会構造系論文報告集,439,(1992),189-198