鍋形状容器内自然対流の有限要素計算

日大生産工 (学部) ○片桐　由里子
日大生産工 (院)　相磯　友宏
日大生産工　角田　和彦

1．緒言

重力場の中で密度や密度勾配の変化によって生じた浮力が駆動力となり、対流が起こるものに自然対流がある。これは日常生活の中でよく現れる自然現象の一部であり、私たちの生活に密接に関わっており、興味深い現象が多くある [1] [2]。

本論文では、日常生活で自然対流の起こるものの代表として、鍋形状容器を対象に、その容器内での対流現象の有限要素シミュレーションを行うことを目的としている。その際、高 Rayleigh 数域までの解析を安定に行うために指数関数 Petrov-Galerkin 有限要素スキームを採用する。また、時間積分には高精度で高速に計算出来る、2 次精度の Adams-Bashforth 法を適用している [3] [4]。

2．基礎微分方程式

ここで扱う自然対流問題では、Boussinesq 近似された Navier-Stokes 方程式と、連続の式、及びエネルギー方程式を用いる。これらの方程式に無次元化を行うと次式となる。

$$\dot{u}_i + u_j u_{i,j} = -p_{,i} + \frac{1}{G_r}(u_{i,jj} - Te_i) \qquad (1)$$

$$u_{i,i} = 0 \qquad (2)$$

$$\dot{T} + u_i T_{,i} = \frac{1}{Ra} T_{,ii} \qquad (3)$$

ただし、u_i は速度ベクトル成分、T は温度、p は圧力、e_i は $e_1 = e_3 = 0$、$e_2 = -1$、Gr は Grashof 数、Ra は Rayleigh 数である。これらの方程式に fractional step 法を適用すると次の方程式系を得る。

$$\dot{u}_i(\tilde{u_i}, u_i^n) + u_j u_{i,j} = \frac{1}{Gr} u_{i,jj} - \frac{1}{Gr} Te_i \qquad (4)$$

$$\dot{u}_i(u_i^{n+1}, \tilde{u_i}) = -p_{,i}, u_{i,i} = 0 \qquad (5)$$

ただし、$\tilde{u_i}$ は修正速度ベクトル、n は時間ステップである。

ここで、圧力場に関する式 (5) の時間積分に、修正速度ポテンシャル ϕ を導入して、圧力と速度ベクトルについて解くことになる。

3．指数関数型 Petrov-Galerkin 有限要素法

高 Rayleigh 数を扱う事で数値が発散したり、擬似的な振動を起こす場合がある。そこで、数値計算手法として、上流の影響を重み関数に取り入れる指数関数型 Petrov-Galerkin 有限要素法を用いる。

流れ場全域にわたる保存性を考えるため、式 (3),(4) において弱形式化を用いる。

$$\int_{\Omega_e} \{\dot{u}_i(\tilde{u}_i, u_i^n) + u_j u_{i,j}\} M_\alpha d\Omega + \int_{\Omega_e} \frac{1}{Gr} Te_i M_\alpha d\Omega$$

$$+ \int_{\Omega_e} \frac{1}{Gr} u_{i,j} N_{\alpha,j} d\Omega = \int_{\Gamma_e} \tau_i N_\alpha d\Gamma \qquad (6)$$

$$\int_{\Omega_e} \{\dot{T} + u_i T_{,i}\} M_\alpha d\Omega + \int_{\Omega_e} \frac{1}{Ra} T_{,i} N_{\alpha,i} d\Omega = \int_{\Gamma_e} q N_\alpha d\Gamma \qquad (7)$$

ただし、Ω_e は領域 Ω の部分領域、n_j は単位法線ベクトル成分、M_α は指数関数型の重み関数である。

ここで、時間進行スキームとして、2 次精度の Adams-Bashforth 法を適用すると、次式を得る。

$$M_{\alpha\beta} \frac{\{\tilde{u}_j\}_\beta - \{u_i^n\}_\beta}{\Delta t} = \frac{1}{2}(3F_{i\alpha}^n - F_{i\alpha}^{n-1}) \qquad (8)$$

$$M_{\alpha\beta} \frac{T_\beta^{n+1} - T_\beta^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}(3\hat{F}_\alpha^n - \hat{F}_\alpha^{n+1}) \qquad (9)$$

Finite Element Calculation of Natural Convection in a Pan-Shape Container

Yuriko KATAGIRI ,Tomohiro Aiso and Kazuhiko KAKUDA

ただし、

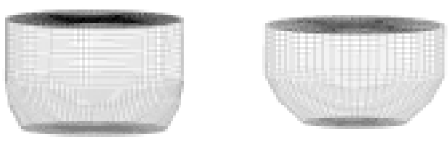
$$
\begin{aligned}
F_{i\alpha}^{n} = & - \{K_{\alpha\beta}(u_j^n) + \frac{1}{Gr}D_{\alpha\beta}\}\{u_i^n\}_\beta \\
& - \frac{e_i}{Gr}M_{\alpha\beta}T_\beta^n + f_{i\alpha}^n \qquad (10)
\end{aligned}
$$

$$
\hat{F}_\alpha^n = -\{K_{\alpha\beta}(u_j^{n+1}) + \frac{1}{Ra}D_{\alpha\beta}\}T_\beta^n + f_\alpha^n \qquad (11)
$$

4．数値計算例

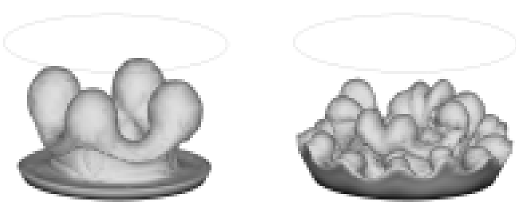
本研究の計算領域として、鍋形状容器モデル A と B を考える (図 1 参照)。計算に用いた有限要素メッシュのモデル A では総節点数 50,280、総要素数 47,125 である。モデル B では総節点数 25,680、総要素数 23,925 であり、両モデル共に 8 節点 6 面体要素とし、水のプラントル数は 7.0 としている。境界条件としては、鍋形状の底面に T=1 の高温を与え、側面に接しない鍋形状上面に T=0 の低温を設定した。その他の面は断熱としている。

図 1 に有限要素メッシュ、図 2 に Rayleigh 数が異なる場合の温度場 T=0.13 での等値面を示す。また、図 3 はモデルが異なる場合の $Ra = 10^4$ での等温度分布の挙動を表す。

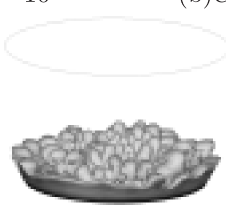


(a) モデル A　　(b) モデル B

図 1: 有限要素メッシュ

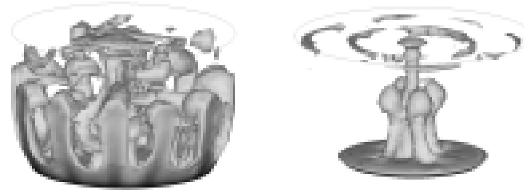


(a) $Gr = 10^3$　　(b)$Gr = 10^4$



(c) $Gr = 10^5$

図 2: 温度場 T=0.13 での等値面



(a) モデル A　　(b) モデル B

図 3: 形状が異なる場合の等温度分布 (t=5000)

5．結言

鍋形状容器内自然対流問題について、Rayleigh 数の異なる場合、及び形状の異なる場合についての解析結果を通して以下の点が明らかになった。

(1)Rayleigh 数が異なる場合

Rayleigh 数の増加に伴い、温度上昇の個所が増えることが分かる。また、Rayleigh 数の値が高い方が、熱が短時間で伝わることが確認された。

(2) 形状が異なる場合

モデル A の方がモデル B より、高温条件を与えた領域が広範囲であるため熱の伝わり方が早いことがわかる。また、底面の高温が与えられている範囲が大きい方が複数箇所からの温度上昇が見られ、同時刻でも効率のよい熱伝導であることがわかった。

今後の課題として、熱の当たる面積が等しく、形状の異なる場合の対流にどのような挙動が得られるのかの比較検討がある。また、本研究では鍋形状の曲線部分を直線の組み合わせにより擬似的に表現したモデルであるので、実際に曲線の入ったモデルによる解析も検討したい。

参考文献

[1] T.Ohya,Y.Miki,”Unsteady Tree-Dimensional Behavior of Natural Convection in Horizontal Annulus”, 日本原子力学会誌,vol30,87-96(1987)

[2] 登坂宣好・大西和榮,”偏微分方程式の数値シュミレーション”, 東京大学出版会 (1991)

[3] 角田和彦・登坂宣好,”非定常非圧縮粘性流れ問題の指数関数型 Petrov-Galerkin 有限要素法”, 日本建築学会構造系論文報告集,439,(1992),189-198

[4] 角田和彦,”3 次元円柱まわりながれの指数関数型 Petrov-Galerkin 有限要素法”日本建築学会大会講演概要集,(1999-9)