

メッシュレス有限要素法による弾性体の解析

日大生産工(院) 大川 功次郎
日大生産工 登坂 宣好

1 まえがき

現在、我々が生活を営む上で逆問題は意識するしないに関わらず、身近なところに存在している。その典型的な例として、原子力発電所の配管の非破壊検査・地下資源探査・超音波診断などが有る。

逆問題を解く上で大切なのが、逆問題の対の考えになる順問題をいかに精度良く解くか、ということである。例えば、物性値同定逆問題では求めたい物性値をまず仮定しFEMなどの数値計算手法を用い変位を求める。その変位を測定データとし、フィルタ理論やベイズ推定などの逆解析手法を用いて、物性値を正解値に収束させてゆく。変位を求める部分が順問題であり、物性値を収束させる部分が逆問題となる。

本論では、物性値同定逆問題の順問題にあたる2次元弾性体の解析を、要素分割を必要としないメッシュレス有限要素を適用し、その有効性を検討する。

2 メッシュレス離散化

2.1 支配方程式

本手法では、2次元弾性体において次式のように表された弱形式(仮想仕事の原理)を支配方程式として用いる。

$$\iint_V \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV - \int_{S_1} \{\delta u\}^T \{t\} dS \quad (1)$$

$$- \iint_V \{\delta u\}^T \{b\} dV = 0$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{on} \quad S_2 \quad (2)$$

ここに $\{\sigma\}$ 、 $\{\varepsilon\}$ 、 $\{u\}$ は、それぞれ応力、ひずみ、変位を表し、 $\{t\}$ 、 $\{b\}$ は表面力、体積力を表す。また、 V は解析領域内部、 S_1 は自然境界条件を与える領域境界、 S_2 は基本境界条件を与える領域境界を表す。

2.2 内挿関数の作成

本手法では、被積分関数を評価するためにFEMで用いられているような要素単位での内挿ではなく移動最小2乗法⁽¹⁾(The Moving Least Square Method: 以下MLSMと記す)による内挿方法が用いられる。

MLSMを用いる場合、各節点における近似関数 ϕ^h を次式のように設定する。

$$\phi^h(x, y) = \sum_j^m p_j(x, y) a_j(x, y) \\ \equiv \{P(x, y)\}^T \{a(x, y)\} \quad (3)$$

ここで、 P_j は空間座標 x, y を含む多項式で、 a_j は未定係数である。 m は展開に用いた項数で、例えば $m=3$ の場合は次式のように選ばれる。

$$\{P(x, y)\}^T = [1, x, y] \quad (4)$$

MLSMでは次式で定義される評価関数 J を最小化させるように未定係数 a_j を決定する。

$$J = \sum_I^n w(\{x\} - \{x_I\}) [\phi^h(\{x\}) - \phi_I]^2 \\ = \sum_I^n w(\{x\} - \{x_I\}) [\{P(\{x\})\}^T \{a(\{x\})\} - \phi_I]^2 \quad (5)$$

ここで $\{x\} = (x, y)^T$ であり、 n 、 $\{x_I\}$ はそれぞれ評価点 $\{x\}$ の近傍に位置する節点数、節点座標である。 ϕ_I は近似関数 ϕ^h の節点 I での値であり、 $w(\{x\} - \{x_I\})$ は評価点 $\{x\}$ への節点 I の寄与度を重みづける関数で、以下「重み関数」と記す。

これらの n 個の節点での値が、評価点での値を内挿するために用いられる。その影響の大きさを表現する重み関数は節点上で1、節点からの距離が増加するにつれて零に減衰するような滑らかな連続関数であるものとする。

式(5)の未定係数 $\{a\}$ についての停留条件よ

り、 $\{a\}$ が求まり、さらにそれを式 (3) に代入することによって次式を得る。

$$\phi^h(\{x\}) = N_I(x)\{\phi_I\} \quad (6)$$

ただし、

$$N_I(x) = \{p(\{x\})\}^T [A(\{x_I\})]^{-1} [B(\{x_I\})] \quad (7)$$

ここで $[A]$ 、 $[B]$ はそれぞれ m 行 m 列、 m 行 n 列のマトリックスで、節点座標 $\{x_I\}$ から計算できる。

式 (6) によって、任意の評価点 $\{x\}$ での近似関数 $\phi^h(\{x\})$ は、その点の近傍の節点値 $\{\phi_I\}$ を用いて表現されることになる。評価点まわりの影響半径と重み関数を適切に選ぶことにより、式 (7) を内挿関数として用いることが可能となる。

本手法では、影響半径を節点密度に依存しない合理的な決定方法を用いる。すなわち、影響半径 d_m を積分評価点とその点を囲む最小の多角形を構成する節点との距離の最大値 d_{max} を基準として次式のように決定する。

$$d_m = k \times d_{max} \quad (8)$$

ここに、無次元数 k をスケールファクタと称する。 k は、1.1から2.0程度の値である。

また、重み関数として次式で示す四次のスプライン関数を用いる。

$$w_I(r) = 1.0 - 6.0\left(\frac{r}{\rho_I}\right)^2 + 8.0\left(\frac{r}{\rho_I}\right)^3 - 3.0\left(\frac{r}{\rho_I}\right)^4 \quad (9)$$

$(0 \leq r \leq \rho_I)$

ここで、 r 、 ρ_I はそれぞれ評価点 $\{x\}$ からの距離、重み関数の台の半径である。また、 $w(\{x\} - \{x_I\})$ を簡単のため $w_I(r)$ と表した。

2.3 数値積分

弱形式表示された基礎方程式を離散化するためには、領域積分操作が必要である。節点情報のみからこの操作を実施するためには節点積分のルールを設定する必要がある。

本論では、図1に示すバケットを利用して節点毎に領域積分のための重みを計算しておく。ここで、バケットとは節点探索を効率的に行うために用いられる解析領域被うように与えられているものである。

具体的には、各バケットの面積をその中心からの近傍の影響範囲内にある節点に分配する。面積の分配率はバケットの中心と節点との距離から計算される重み関数の値から決定する。

すなわち、バケット内のサンプル点 i の、その近傍に取られた影響範囲内にある節点 k へのサンプル点の面積 A_i の寄与分 a_{ik} を次式で計算する。

$$a_{ik} = w_{ik} A_i / \sum_{j=1}^n w_{ij} \quad (10)$$

ここに n は影響範囲内にある総節点数、 w_{ik} は積分点 i の座標と節点 k との座標から計算される距離の関数となる重み関数である。 w_{ik} は内挿関数を作成する際にMLSMで用いられた重み関数と同様なものを用いることができる。また、影響半径の大きさは式 (8) で示した方法で決定される。

式 (10) で与えられる面積 a_{ik} を、節点ごとに総和をとりこれを W_k と表し、節点での重みとする。この、 W_k を用いて解析領域の面積は数値積分のための重みとして、節点上に分配されることになる。

ここで、解析領域内部 V での被積分関数 $F(x, y)$ の面積分を次式のように近似評価する。

$$\iint_V F(x, y) dx dy \cong \sum_{I=1}^{NP} F(x_I, y_I) W_I \quad (11)$$

ここに、NPは解析領域内部に分布する節点の総数、 x_I 、 y_I は節点 I の座標である。

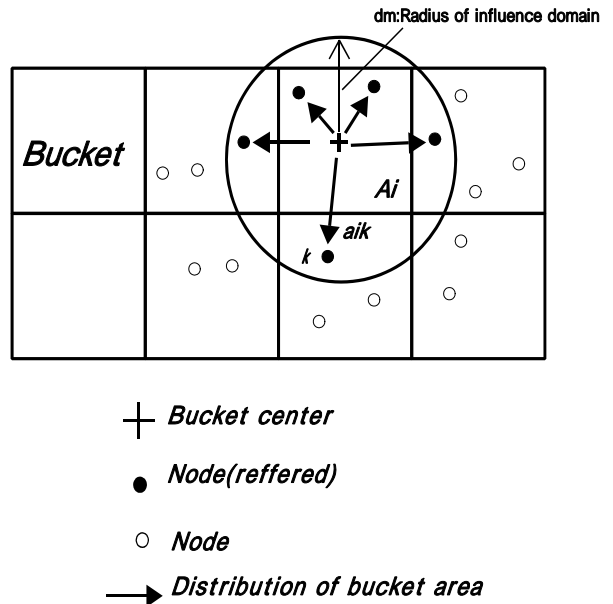


図1 領域積分のための節点重み

なお、解析領域の面積 A_{total} は次式を用いて近似的に計算されることになる。

$$A_{total} = \sum_{k=1}^N W_k \quad (12)$$

もし、別の方法で解析領域の面積が評価可能な A_{total} が既知であれば、式(12)を用いて節点での重み W_k の妥当性を検証することができる。

2.3 節点剛性評価

本手法では、節点単位での剛性方程式の成分の寄与を計算する。すなわち、式(1)の左辺第1項を、式(11)にならいう式のように近似的に評価する。

$$\iint_V \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV \cong \sum_{I=1}^{NP} \{\delta\varepsilon_I\}^T \{\sigma_I\} W_I \quad (13)$$

ここに $\{\sigma_I\}$ 、 $\{\varepsilon_I\}$ は節点 I における応力、ひずみを表すものとする。

節点 I における変位 $\{u_I\}$ は次式のように表すことができる。

$$\{u_I\} = [N_I] \{U_I\} \quad (14)$$

ここに $[N_I]$ は式(7)のように節点 I で局所的に定義される内挿関数、 $\{U_I\}$ は節点 I の近傍に位置する節点での変位成分を表す。

式(14)の微分を用いて、節点 I でのひずみ $\{\varepsilon_I\}$ は次式のように表される。

$$\{\varepsilon_I\} = [B_I] \{U_I\} \quad (15)$$

$$B_I = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{n,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & \cdots & 0 & N_{n,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{n,y} & N_{n,x} \end{bmatrix} \quad (16)$$

線形弾性体の応力 ひずみ関係は次式のように表される。

$$\{\sigma_I\} = [D] \{\varepsilon_I\} \quad (17)$$

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

ここで、 E はヤング率、 ν はポアソン比を表す。

式(14)、(15)、(17)を式(13)の右辺に代入して整理して次式を得る。

$$\iint_V \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV \cong \sum_{I=1}^{NP} \{\delta U_I\}^T [k_I] \{U_I\} \quad (19)$$

ここに、 $[k_I]$ は節点単位で局所的に定義される剛性成分で次のように表される。

$$[k_I] = [B_I]^T [D] [B] W_I \quad (20)$$

すなわち、剛性マトリックスの成分は節点単位で計算され、これを重ね合わせることによって系全体の剛性マトリックスが組み立てられる。

式(1)の左辺第2項、第3項で表される表面力、物体力も同様な方法で離散化することにより、式(1)は次式のように表される。

$$\{\delta U\}^T ([K_G] \{U\} - \{F\}) = 0 \quad (21)$$

$$K_G = \prod_{k=1}^{NP} [k_I] \quad (22)$$

また、 $\{U\}$ は全体節点変位ベクトル、 $\{F\}$ は全体節点荷重ベクトルである。式(22)の \prod は全体化の操作を表す。式(21)から得られる全体剛性方程式を解くことにより、未知変位を求めることができる。

3 数値計算例

本手法の計算精度を検討するために、2次元弾性問題を上記の手法を用いて解く。その結果を厳密解またはFEMによる解析結果と比較する。

3.1 片もち梁の解析

図2に示す片もち梁の自由端に荷重を与え変位を求める。節点分布を図3に示す。スケールファクタ k を1.4、内挿関数を決定するための MLSMでの重み関数として4次のスプライン、バケットの一辺の長さを節点間距離程度とした。

この問題の、厳正解は次式で与えられる。

$$u_x = \frac{-Py}{6EI} \left\{ (6L-3x)x + (2+\nu)(y^2 - \frac{1}{4}D^2) \right\}$$

$$u_y = \frac{P}{6EI} \left\{ 3y^2(L-x) + \frac{1}{4}(4+5\nu)D^2x + (3L-x)x^2 \right\} \quad (23)$$

ここで、 I は断面2次モーメントである。各節点の変位について厳密解と比較して表1,2に示す。

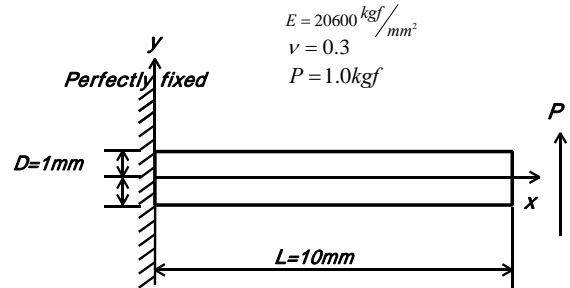


図2 片もち梁

number of nodes 369

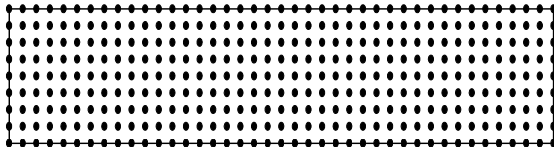


図3 節点分布図

表1 変位の比較 (x方向)

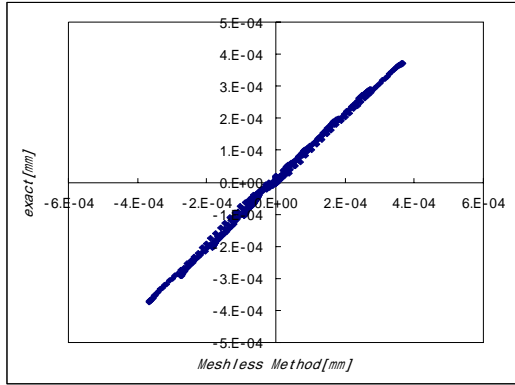
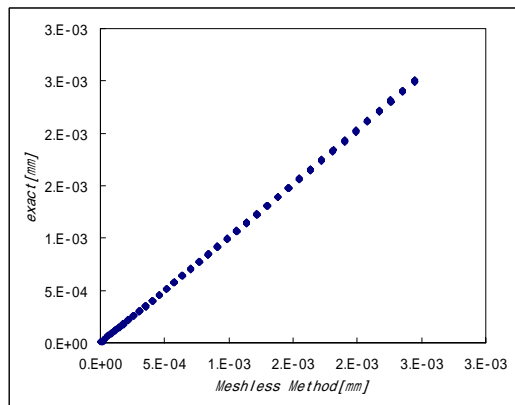


表2 変位の比較 (y方向)



3.2 正方形モデルの解析

物性値同定逆問題では、図4に示すモデルを用いる。スケールファクタ k 、重み関数、バケットの一边の長さは3.1と同様とし解析を行う。表3にモデルの上端における変位をFEMと比較して示す。

number of nodes 36

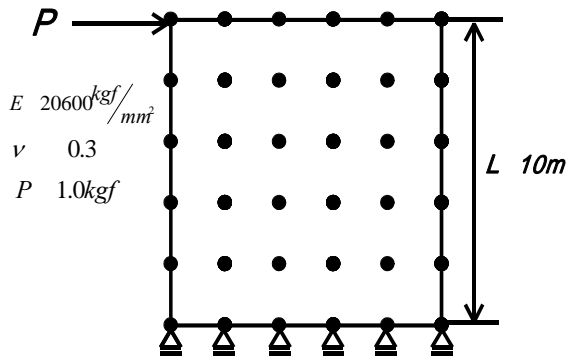


図4 正方形モデル

表2 モデル上端における変位

| FEM | | Meshless Method | |
|-----------|------------|-----------------|------------|
| u_x | u_y | u_x | u_y |
| 8.714E-05 | 4.001E-05 | 9.692E-05 | 3.821E-05 |
| 7.057E-05 | 1.487E-05 | 7.585E-05 | 1.646E-05 |
| 6.091E-05 | 2.998E-06 | 6.829E-05 | 7.538E-06 |
| 5.565E-05 | -5.056E-06 | 5.785E-05 | -1.005E-05 |
| 5.362E-05 | -1.289E-05 | 5.677E-05 | -1.599E-05 |
| 5.336E-05 | -2.266E-05 | 5.063E-05 | -3.230E-05 |

4 おわりに

本論では、メッシュレス有限要素法を二次元弾性体に適用しその計算精度について比較した。数値計算例により、本手法を厳密解が得られている問題に適用し解がほぼ一致する結果を得られた。さらに、厳密解が得られない問題にも、同じ節点配置を用いたFEMによる解析結果と比較することにより同等の結果が得られることを示した。

計算時間に関しては、入力情報として要素節点コネクティビティを必要としない本手法は、各節点での重みを計算するプロセスの分だけ、FEMと比較して多くの計算時間を必要とした。

今後は、二次元弾性体において静的加重による変位を観測値とし、ヤング率やポアソン比などの弾性定数を同定する物性値同定逆問題の解析に本手法を援用して適用を検討してゆく。

参考文献

- [1] Belytschko, T., Lu, Y.Y. and Gu, L., Element-Free Galerkin Methods, Int. J. Num. Methods Eng., 37(1994), PP239-256
- [2] 奥田洋司・長嶋利夫・矢川元基, エレメントフリー Galerkin 法に関する基礎的検討 (第1報) 常微分方程式への適用, 機会学会論文集 (A編) 61 590 (1995) PP2302 - 2308
- [3] 奥田洋司, 長嶋利夫, 野口裕久, わかるエレメントフリー法, 日本機械学会講習会教材, No. 98-67, (1998) pp1-78
- [4] H.Okuda, Y.Satoh and O.Hazama, Digital Analysis Procedure Using Image Processing and Element-Free Galerkin Method, Proc. ICES98, MODELING AND SIMULATION BASED ENGINEERING, Vo1, (1998), PP1825-1830