

1. はじめに

近年、コンピュータの処理能力は目覚しく向上し、従来よりもはるかに複雑な計算が可能になってきている。本研究では、物理法則に基づくビリヤードゲームの作成を行う。ボールは2次元平面上を移動するが、球体どうしの回転を考慮した衝突とアモンソン・クーロンの摩擦法則考慮し摩擦を加えて物理シミュレーションの作成を試みる。

2. ボール同士の衝突

本研究ではボール2つの衝突のみを考える。衝突判定は球の中心座標の距離が球の直径以下になったときに行うようにしている。球体同士の衝突は、完全弾性衝突のみを考え、質量はすべて同じとしているため質量は考えない。

衝突前と衝突後の速度では衝突面に対して、鉛直方向の成分のみの入れ替えで行われる<sup>2)</sup>。

球 0,1 のそれぞれの速度を  $V_0, V_1$  とする。球どうしの衝突面、平面 P に鉛直な成分を  $V_{0x}, V_{1x}$ 、平行な成分  $V_{0y}, V_{1y}$  とする。完全弾性衝突の場合、衝突後の速度は、 $V_0'=[V_{1x}, V_{0y}]$ ,  $V_1'=[V_{0x}, V_{1y}]$  となる。各球は X Y 平面上を動くとして仮定しているので Z 軸方向と X 軸方向の成分を持っており、その速度のベクトルと衝突面の座標と各球の中心の座標を使い、衝突後の速度を求める。

まず衝突判定時の座標を元にベクトルを求めていく。

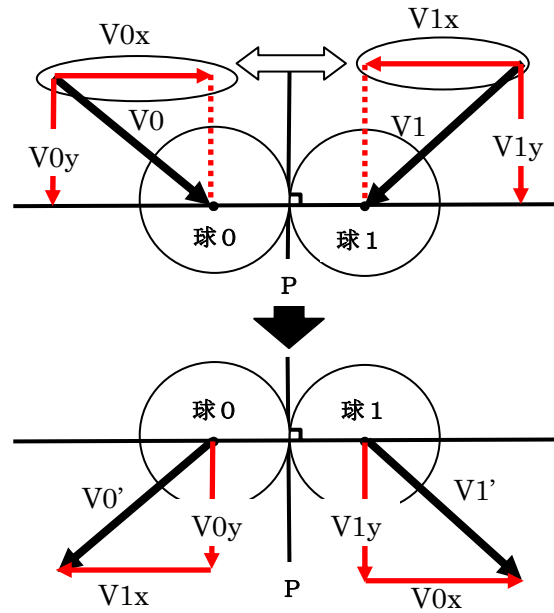


図1 衝突の速度ベクトルの変化

図1のような入れ替えを行うベクトルを求めるために必要な衝突面に垂直な直線に降ろした垂線の座標を求めるために次の式を使用する。ただし、球0の中心の位置ベクトルを  $\vec{A}$ 、球1の中心の位置ベクトルを  $\vec{B}$ 、球 0,1 の中心を結んだベクトルを  $\vec{D}$ 、球0の中心の座標から速度分の座標を戻した点の位置ベクトルを  $\vec{P}$  とする。

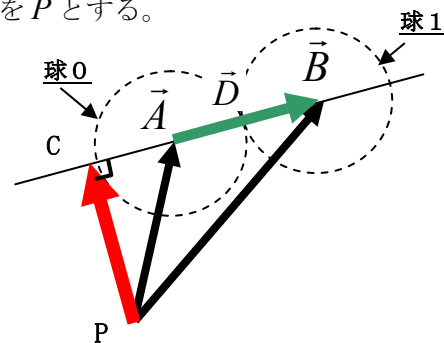


図2 衝突面と平行なベクトルを求める

$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$  とし、 $\vec{A}$  と  $\vec{B}$  を通る直線をパラメータ  $t$  を用いて次式で表す。

$$\vec{Q}(t) = \vec{A} + t\vec{D} \quad (1)$$

座標  $\vec{P}$  からこの直線に垂直に降ろした交点を  $\vec{C}$  とすると、

$$(\vec{P} - \vec{C}) * \vec{D} = 0 \quad (2)$$

である。 $\vec{C}$  は直線上の点であるので、 $\vec{C}$  に式 (1) を代入し、 $t$  について解くと、

$$t = \frac{\vec{P} * \vec{D} - \vec{A} * \vec{D}}{\vec{D} * \vec{D}} = \frac{(\vec{P} - \vec{A}) * \vec{D}}{\vec{D} * \vec{D}}$$

となる。よって、 $\vec{C}$  の座標が求まるために速度ベクトルを2つの成分に分解することができる。

### 3. 摩擦

床と球との摩擦にはアモントン・クーロンの摩擦法則を利用する。アモントン・クーロンの摩擦法則とは摩擦力は荷重に比例する（第1法則）、摩擦力はみかけの接触面積に依存しない（第2法則）、動摩擦力は滑り速度に依存しない（第3法則）があり、第1第2法則から摩擦係数（摩擦力÷荷重）は、荷重にもみかけの接触面積にも関係せず、摩擦している固体の表面状態とその材料の種類に依存する。しかし、この法則は実験的に得られたものであって、自然現象に普遍的に成立する法則ではない<sup>1)</sup>。

#### 3.1 ヒースコート滑り

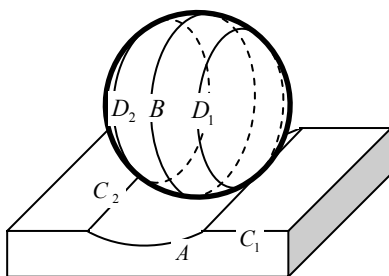


図3 溝を転がる場合

図3のように半径  $R$  の球が半径  $R'$  の溝を転がる場合（例：ボールベアリング）を考えていく。そのときの横から見た図(図4)と正面から見た図(図5)を考える。

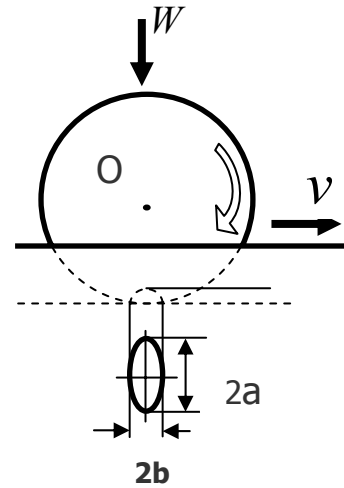


図4 横から見た図

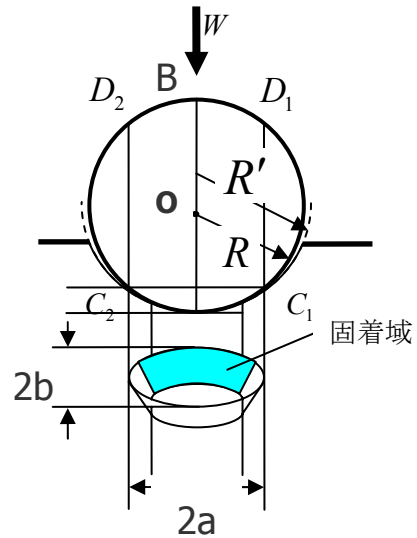


図5 正面から見た図

荷重を  $W$  とし、直径  $2R$  の球が円形溝を転がる際の接触楕円の直径が  $2a$  であるときに生じる転がり摩擦力  $F_R$  は近似的に

$$F_R = \frac{\mu W}{12} \left( \frac{a}{R} \right)^2 \quad (6)$$

で求まる。ここで、 $\mu$  は差動滑り（ヒースコート滑り）における摩擦係数である。弾性接

触で  $a$  は  $(WR)^{1/3}$  に比例する <sup>1)</sup> ので(式(6))から

$$F_R = k \frac{W^{5/3}}{R^{4/3}} \quad (7)$$

と表せる。式(7)での  $k$  は比例定数である。以上のことから、転がり摩擦力は荷重が大きくなると増加し、球の半径が大きくなると小さくなることわがわる(円形溝の半径  $R'$  は関係しない) <sup>1)</sup>。

### 3.2 球の転がり摩擦の法則性

転がり摩擦には一般性のある法則が存在しないが、その特性としてはいくつか上げられる。

- 転がり摩擦力  $F_R$  は  $W^m$  に比例する ( $m$  は 1.2 から 2.4 の範囲)。
- 転がり摩擦力  $F_R$  は球の半径  $R$  にほぼ反比例し変化する。
- 転がり摩擦力  $F_R$  は表面粗さの影響を強く受ける。

転がり摩擦係数は、金属の場合は  $10^{-4}$  あるいは  $10^{-3}$  程度になる <sup>1)</sup>。

### 3.3 平面上における球の転がり

球が平面上を転がる場合(円形溝の半径  $R'$  が無限大)を考える。3.1で述べたとおり、円形の溝の半径  $R'$  は転がり摩擦力に依存しないために、無限大にしても摩擦に影響しない。この場合でも前の  $C_1, A, C_2$  のような接触部が生じるためヒースコート滑りが適用できる。しかし、球が平面上を真っ直ぐ転がらずにカーブする場合は、また別のタイプの微小滑りが起こる。

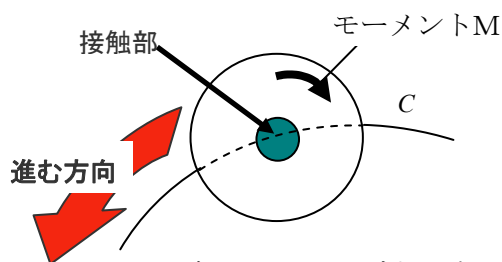


図6 回転によりカーブする球

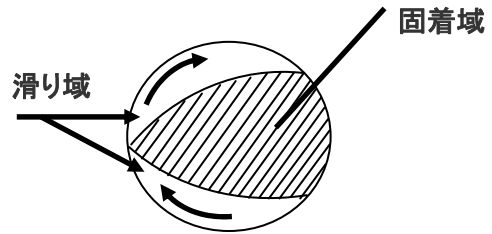


図7 カーブ球の接触部分

図6のように曲線Cに沿って転がるために図のような回転モーメントMが必要である。このモーメントMは接触部で生じ、曲線の内側と外側で反対方向の微小滑りが起こる <sup>1)</sup>。

### 4. 球の回転

球の回転は地面との摩擦を考慮するが、実際の摩擦を細かく考慮するのは非常に困難なため次の手法を考えた。まず、一定以上の速度の場合は回転を無視して考える。速度が遅くなってから床との摩擦を考え始める。その場合、回転軸は進行方向と平行なベクトルを含まないと考えられる(図8)。球同士が衝突する際に接触点での回転方向のベクトルを考えなければならない。そのために回転方向のベクトルを床の鉛直方向と水平方向に分け、回転の衝突の場合では水平方向のベクトルのみを考える(図9)。鉛直方向のベクトルは速度に関する。

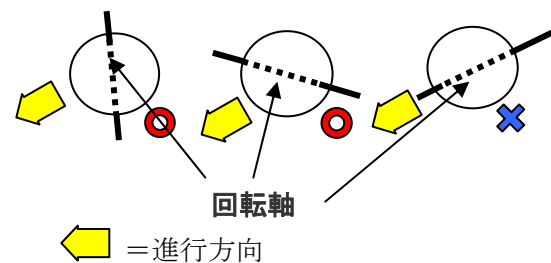


図8 回転軸の方向

水平方向のベクトルを互いの球から測定し、そのベクトルそれぞれを、3.3で考えた“水平面との転がり摩擦”を使用する。

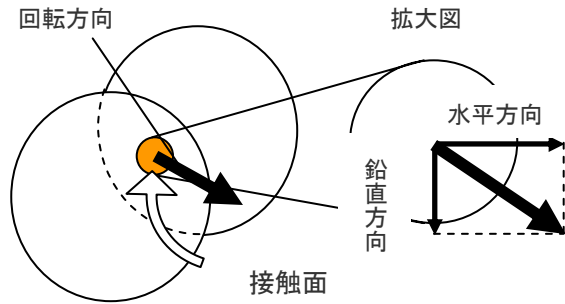
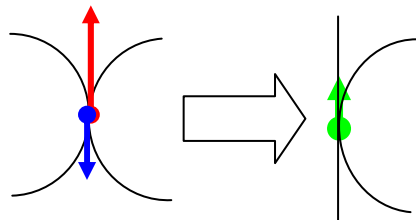


図9 接触面のベクトル

それぞれの球ごとに求めた回転をそれぞれ反対の球のベクトル方向に加える。水平方向のベクトルが逆方向なら回転の反対方向に、同方向なら回転の方向に加える。

反対方向の回転の場合



同方向の場合

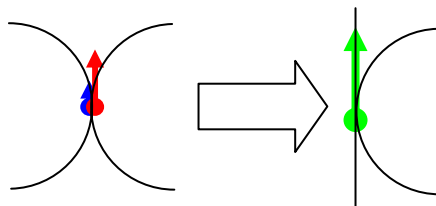


図10 回転ベクトルの加え方

そして、ここで求めた水平方向のベクトルを弾性衝突のベクトルにそれぞれを加えることで回転方向を考慮できると考えた。

## 5. 実行結果

完全弾性衝突と簡易摩擦（本研究では回転を考慮してからでなければ摩擦は加えられないので常に一定値を乗算させる簡易摩擦を使用した）、および任意の方向に打ち出すことまでを実装している(図11(i))。図11(a)-(h)は、ビリヤードのシミュレーションの様子であり、ポケットに入った球は脇に並べられる。

## 6. まとめ

本研究では、ボールの完全弾性衝突と簡易的な摩擦を考慮したビリヤードを作成した。今後の研究としては、回転や転がり摩擦の考慮、ビリヤードゲームとしてのより使いやすいインターフェースなどがあげられる。

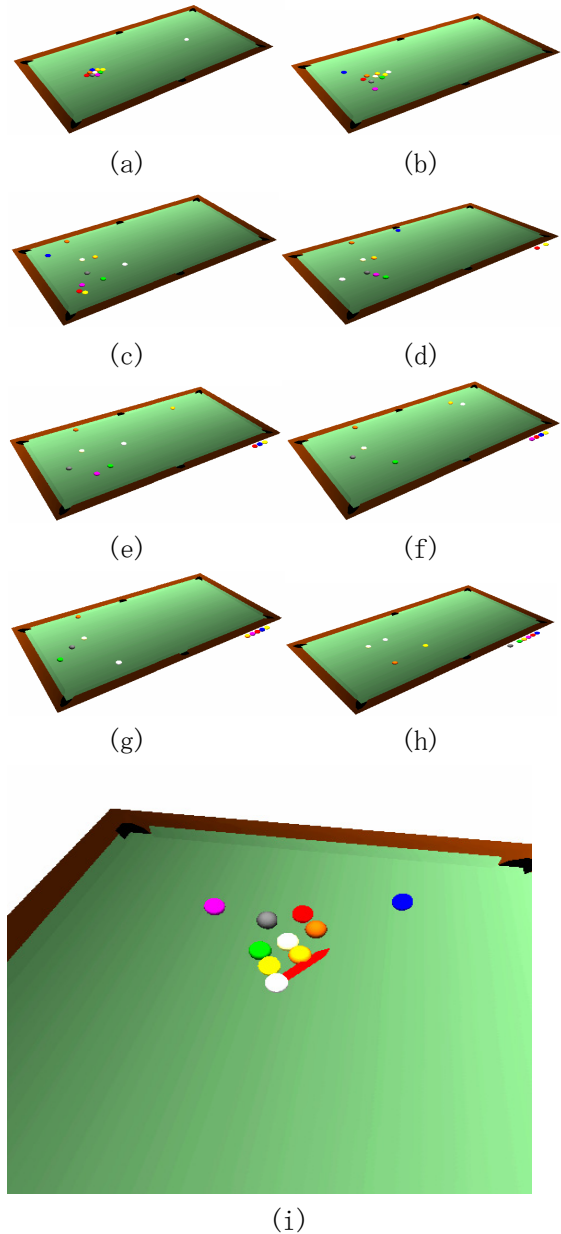


図11 実行画面

## 参考文献

- 1) 田中久一郎, 摩擦のおはなし, 日本規格協会, (1985), pp. 33-37, pp. 141-153
- 2) 上田顕, コンピュータシミュレーション, 朝倉書店, (1990), pp. 45-48