複数評価者一対比較デザイングラフの対数線形モデルによるウェイト推定法

日大生産工 (院) † 肥田 裕子
日大生産工 大澤 慶吉
日大生産工 篠原 正明
筑波大学 高橋 磐郎

1 概略

複数評価者が一対比較を行う大規模な AHP などにおいて, 対数最小 2 乗法に基づいて一対比較デザイングラフのウェイト推定を行う方法を提案する. 評価者数 $k=1$ の場合は, 既存の LLS ウェイト推定に帰着するが, 評価者数 $k>1$ の場合は, 個々の評価者が一対比較を行う際に, 一対比較を大げさにあるいはひかえめに判断する個性パラメータを考慮した.

2 誤差モデルの選定

項目 i を節点 i に, 項目 j を基準にした項目 i の一対比較 (i,j) を有向枝 (i,j) に対応させた一対比較デザイングラフを定義する. 評価者 k による一対比較 (i,j) の測定値を $a(i,j;k)$ とする (ここで, 同一評価者は一対比較 (i,j) に 1 つの測定値が対応すると仮定しているが, 同一評価者による同じ一対比較の多重測定も, 記号法の変更により容易に対処できる).
文献 [1] においては, 測定値 $a(i,j;k)$ の誤差モデルとして, 次式 (1) に基づく非線形 LLS によるウェイト推定を行った.

$$a(i,j;k) = (\frac{x(i)}{x(j)})^{\alpha(k)} \times e(i,j;k) \qquad (1)$$

但し,$x(i)$ は項目 i のウェイト,$\alpha(k)$ は評価者 k の個性パラメータ, $e(i,j;k)$ は一対比較測定値 $a(i,j;k)$ にともなう乗法系誤差である.

個性パラメータ α が既知ならば,(1) 式の両辺の対数をとれば, 線形モデルとなり, 既存の最小 2 乗法の枠組で解くことが可能であるが, ウェイト x のみならず個性パラメータ α も未知とする問題設定では, 非線形最小 2 乗問題の目的関数の非凸性により, 勾配系の単純なアルゴリズムでは, 解の最小性保証に難点が残っていた. そこで, 次式の新たな誤差モデル式 (2) を提案する.

$$a(i,j;k)^{\beta(k)} = \frac{x(i)}{x(j)} \times e(i,j;k) \qquad (2)$$

ここで,$\beta(k)$ は評価者 k の個性パラメータであり, $\alpha(k) \approx \beta(k)^{-1}$ と対応する. (2) 式の両辺の対数をとると次式となる.

$$\beta(k)\dot{a}(i,j;k) = \dot{x}(i) - \dot{x}(j) + \dot{e}(i,j;k) \qquad (3)$$

ここで,$\dot{a}, \dot{x}$ などは,$\log a, \log x$ の簡易表現である. (3) 式において, 未知数は $\beta, \dot{x}$ であり, 線形モデルとなる.

3 最小 2 乗推定問題への定式化

最小化すべき対数誤差 2 乗和 S は (4) 式で与えられる. 但し, 総和 $\sum$ は, すべての一対比較 $(i,j;k)$ について行われる.

$$S = \sum \dot{e}(i,j;k)^2 = \sum (\dot{a}(i,j;k)\beta(k) - \dot{x}(i) + \dot{x}(j))^2 \qquad (4)$$

ここで,$\beta(k) = 1 + \varepsilon(k)$ と変数変換すると,(5) 式を得る.

$$S = \sum (\dot{a}(i,j;k) + \dot{a}(i,j;k)\varepsilon(k) - \dot{x}(i) + \dot{x}(j))^2 \qquad (5)$$

Weight Estimation via Logarithmic Linear Model of Multi-evaluator Pairwise Design Graph

Yuko HIDA† , Keikichi OSAWA , Masaaki SHINOHARA and Iwaro TAKAHASHI

制約条件としては,$x(i)$ あるいは $\dot{x}(i)$ ならびに $\varepsilon(k)$ に関する正規化条件 (6),(7) を考慮する.

$$\sum_{i=1}^{M} \dot{x}(i) = 0 \tag{6}$$

$$\sum_{k=1}^{N} \varepsilon(k) = 0 \tag{7}$$

ここで,(7) 式は $\sum \beta(k) = N$ に対応し, β の平均値が 1 を意味している. すなわち, 個性パラメータ $\varepsilon(k)$ に関する正規化条件 (7) は, 各パラメータ値 $\beta(k)$ は, 平均像として, $\beta = 1$ をとることを仮定している.

4　最小 2 乗推定問題の解法

(5) 式の目的関数 S を制約条件 (6)(7) の下で最小化するための, 必要条件は, 次式で (8)(9)(10) で与えられる.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}(i)} = 0 (i = 1, \cdots, M) \tag{8}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varepsilon(k)} = 0 (k = 1, \cdots, N) \tag{9}$$

$$L = S + \lambda \sum_{i=1}^{M} \dot{x}(i) + \mu \sum_{k=1}^{N} \varepsilon(k) \tag{10}$$

従って, 正規方程式は, 次式 (11) で与えられる.

$$M \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\varepsilon} \\ \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^T \mathbf{a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$M = \left[\begin{array}{cc|cc} X^T X & & \mathbf{e_m} & 0 \\ & & 0 & \mathbf{e_k} \\ \hline \mathbf{e_m}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{e_k}^T & 0 & 0 \end{array} \right] \tag{12}$$

$$X = \left[\begin{array}{c|ccc} & -\mathbf{a}_1 & & \\ C & & \ddots & \\ & & & -\mathbf{a}_k \end{array} \right] \tag{13}$$

但し,$\mathbf{e}$ は適当な大きさの全要素 1 の列ベクトル, C はデザイングラフの接続行列,$\mathbf{a}_k$ は評価者 k の一対比較測定値列ベクトル, $\mathbf{a}$ は $\dot{a}(i, j; k)$ を要素とする列ベクトル.

5　例題

図 1 に示す項目数 $M = 3$, 評価者数 $N = 2$ の一対比較デザイングラフを考える.

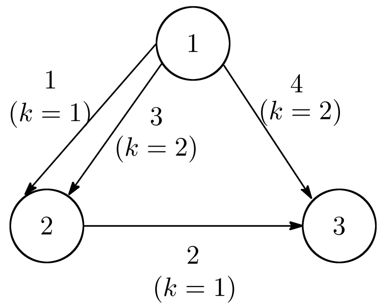

図 1　2 評価者 ($k = 1$ と $k = 2$)
のデザイングラフ

2 人の評価者による一対比較測定値が, $a(1, 2; 1)$
$= 1$(対数値 $\dot{a}_1 = 0$),$a(2, 3; 1) = 3$(対数値 $\dot{a}_2$ $= 1.099$), $a(1, 2; 2) = 4$(対数値 $\dot{a}_3 = 1.386$), $a(1, 3; 2) = 2$(対数値 $\dot{a}_4 = 0.693$) で与えられる場合は, 以下の結果を得る.

$\hat{\dot{x}}_1$=0.40672,	$\hat{\dot{x}}_2$=0.235366,	$\hat{\dot{x}}_3$=-0.64209,
ε_1=0.330681,	ε_2=-0.330681	
$\hat{x}_1$=1.501883,	$\hat{x}_2$=1.265371,	$\hat{x}_3$=0.526191,
λ=-2.5,	μ=-0.64288	

すなわち, 項目 $1, 2, 3$ のウェイトは各々約 $1.5, 1.3$,
0.5 であり, 評価者 1 の個性パラメータ $\beta(1) = 1.33$, 評価者 2 の個性パラメータ $\beta(2) = 0.67$ なので, 評価者 1 はひかえ目な傾向 (underestimate) にあり, 評価者 2 は, 大げさな傾向 (overestimate) にあると言える. 又, 両評価者のかい離度が $\beta(1) - \beta(2) = 0.66$ で表される. ここで, ひかえ目な傾向とは, 誤差モデル式 (2) で $\beta > 1$, すなわち, ひかえ目な測定値なので, それを β 乗 ($\beta > 1$) することにより, 真比率に対応すると考える.$\beta > 1$ は近似的には $\alpha < 1$ に対応するが, 誤差モデル式 (1) では, 真比率の α 乗 ($\alpha < 1$) をひかえ目と解釈している.

参考文献

[1] 三宅 千香子, 大澤慶吉, 篠原 正明, 高橋磐郎,「複素評価者不完全一対比較情報下におけるウエイト推定法」　2002 年 日本オペレーションズリサーチ学会秋季研究発表会　,1-B-1, $pp48 - 49$.