

1. はじめに

Bayes 定理は各種 Filtering、ヘルプ等行動支援、検索エンジン、ウィルス検出、など様々な IT ビジネスモデルの構成ソフトウェアの鍵アルゴリズムであり、マイクロソフト、google など多くの IT 企業が Bayes 定理を主要 IT 戦略と位置づけている。本論文では、Bayes 定理をマルコフ連鎖上の結果状態から原因状態の逆推定に関する課題ととらえ、単原因単結果の直接因果関係、間接因果、特定パス因果、特定パス集合因果、などと分類しながら、Bayes 定理を拡張し、最終的には、すべてを包含する形式で一般化を試みる。

2. 単原因状態 i と単結果状態 j の間の直接因果

単純マルコフ連鎖において、原因となる状態 i から結果となる状態 j の間に直接的に遷移が存在する場合 ($P_{ij} \neq 0$) を考えよう。各々の (定常) 状態確率を x_i, x_j とする。直接遷移が存在するので、これを直接因果関係と呼ぼう。

この直接因果のみに注目すると、結果 j が生じた時にその原因が i である逆推定確率を Q_{ji} とすれば、 $i \rightarrow j$ 方向の事象生起の確率フロー (頻度) 値 $x_i P_{ij}$ と $j \rightarrow i$ 方向の推定上の確率フ

ロー値 $x_j Q_{ji}$ は一致すべきである …

「 $x_i P_{ij} = x_j Q_{ji}$ 」が Bayes 定理で

ある[1]。既存の Bayes 定理は、状態集合数 = 1 の部分状態集合を持つ周期的マルコフ連鎖における上記の確率フロー平衡原理の一例である。この Bayes 定理では、因果関係を直接遷移のみに限定している点特徴的である。もし、 $P_{ji} \neq 0$ でも、この影響は対象外である。(確率フロー平衡と乗法定理については、付録参照)

3. 単原因状態 i と単結果状態 j の間の間接因果

状態 i から j に直接遷移が存在しない場合 ($P_{ij} = 0$) はどうすればよいだろうか？直接 (1 ステップ) 因果という意味では存在しないので、 $Q_{ji} = 0$ となるだろう。しかし、2 ステップ因果、3 ステップ因果、… で、原因 i が結果 j へ因果関係を持ちうる。これらを総称して間接因果と呼ぶ。

4. 特定パス間接因果の Bayes 定理

原因状態 i から結果状態 j へ非零遷移の t ステップの有向連鎖 $(i, k_1), (k_1, k_2), \dots, (k_t, j)$ を考える。このパス $r = (i, k_1, k_2, \dots, k_t, j)$ に沿っての遷移確率の積は、

$$P_r = P_{ik_1} \cdot P_{k_1k_2} \cdots P_{k_tj} \quad (1)$$

で与えられ、これがこのパスに沿っての遷移確率である。この特定パスの間接的因果関係に限定した下での結果 j が生じた時にその原因が i である逆推定確率 Q_{ji} は、2 章と同様に次式を満足すべきである。

$$x_i P_r = x_j Q_{ji} \quad (2)$$

5. 特定パス集合因果関係の Bayes 定理

原因の状態 i から結果の状態 j へは通常複数のパスが存在しうる。例えば、周期的マルコフ連鎖の場合は状態 i の属する状態集合 (t) から、周期循環の方向に沿って、状態 j の属する状態集合 $(t+l)$ まで、 $l > 1$ ならば、2 ステップ以上の複数パスが存在しうる。なお、 $l = 1$ で直接遷移が存在する場合は通常の Bayes 定理である。又、 $i \rightarrow j$ への遷移といっても、 i から j に到達後さらに逆戻りしてもう一度 j に到達するというパスも考えられる。いわゆる単純パスに限定されるわけでもない。どのような因果パスに注目するかは、当事者の問題意識に依存する。それを特定パス集合 R としよう。すると、この特定因果パス集合に限定した下での結果 j が生じた時にその原因が i である逆推定確率 Q_{ji} は次式を満足する。

$$x_i \left(\sum_{r \in R} P_r \right) = x_j Q_{ji} \quad (3)$$

ここで、(3)式の特定パス集合 R に基づく因果関係に限定した Bayes 定理は、単一の原因状態と単一の結果状態に関する 2 章～4 章の

Bayes 定理を特別な場合として包含する一般形である。

6. おわりに

原因 i と結果 j が各々、マルコフ連鎖(どんなタイプでも問わない)上で 1 つの状態 i と 1 つの状態 j に対応する場合について、考慮対象の因果関係を指定することにより、それに対応した Bayes 定理が成立することを示した($i = j$ で原因と結果が同じ状態の場合も含む)。

複数原因・複数結果の因果関係での逆推定法に対応する Bayes 定理、マルコフ連鎖以外の確率ネット表現、等が今後の課題である。

参考文献

- [1] 篠原正明：ベイズの定理とマルコフ連鎖と枝確率フロー平衡、第 36 回日大生産工学会講演会・数理情報部会論文集、pp.41-44(2003.12)

付録 確率フロー平衡と乗法定理

確率統計学の分野における乗法定理とは、 $P_r(A \cap B) = P_r(A)P_r(B|A) = P_r(B)P_r(A|B)$ であり、 A を原因事象、 B を結果事象とすれば、Bayes 定理の証明の要となる定理である。一方、確率フローの立場からは、 $P_r(A)P_r(B|A)$ も $P_r(B)P_r(A|B)$ も、両者共に逆方向の確率的発生頻度(あるいは確率フロー)を表わしている。すなわち、単原因・単結果の従来の Bayes 定理の確率フロー平衡解釈 [1] は、注目する因果リンクに関して、「測定された因果頻度＝推定すべき逆因果頻度」を主張するものであり、これは、乗法定理の別の視点と言える。