相対効率モデルの数理計画定式化

日大生産工　　篠原正明
情報システム研究所　篠原　健

１．はじめに

多入力多出力システムの効率性評価法として、相対効率モデルが存在する。相対効率モデルにおいて、分母は基準となる絶対効率値であり、分子は評価対象となる絶対効率値である。どのような相対効率モデルを採用すれば、計算容易な数理計画定式化が可能かを考察する。

２章では相対効率モデルの最適化枠組み、３章では、どのような基準(分母)を選べばどのような数理計画定式化になるか、について述べる

２．相対効率モデル

x_k：システム $k(=1,\dots,n)$ の入力項目属性データ列ベクトル

y_k：システム $k(=1,\dots,n)$ の出力項目属性データ列ベクトル

v：入力項目の評価列ベクトル

u：出力項目の評価列ベクトル

システム k の絶対効率値 A_k を次式で定義する。

$$A_k = u^T y_k / v^T x_k \qquad (1)$$

システム k の相対効率値 R_k を次式で定義する。

$$\mathrm{R}_k = A_k / \mathrm{F}(u, v, x_1, .., x_n, y_1, .., y_n) \qquad (2)$$

ここで、n は評価対象となるシステムの数、分母が基準となる絶対効率値である。

さて、本論文では、(２)式に基づいて、数理計画定式化の容易さを考察するが、より一般的には、以下の定義も可能である。

$$\mathrm{R}_k = \mathrm{G}(A_k)/\mathrm{F}(u, v, x_1, .., x_n, y_1, .., y_n) \qquad (3)$$

$$\mathrm{R}_k = H_k(u, v, x_1, .., x_n, y_1, .., y_n)/\mathrm{F}(u, v, x_1, .., x_n, y_1, .., y_n) \qquad (4)$$

. . . .　などなど

３．基準(分母)の選択

(２)式において、u, v が与えられれば、x_k と y_k は元々与えられているので、R_k は計算できる。DEA などの意思決定枠組では、R_k を最大化するように u, v を決定するという最適化を行っているので、どのような分母の関数形 F(　)を選べば、容易な、それでいて意味のある、最適化が可能かを、以下に検討する。

(３－１)　最大絶対効率値

F が $A_1, \dots, A_n$ に関する最大値演算の場合は、A_k 最大化、制約条件 $\{A_j \le P (j = 1, \dots, n),\ P = 1\}$、さらに A_k 最大化を、$u^T y_k$ 最大化、制約条件 $\{v^T x_k = 1\}$ とすれば、既存の DEA の CCR モデルの LP 定式化に帰着する。(但し、$u, v \ge 0$)

(３－２)　平均絶対効率値

F が A_j に関する平均値の場合は、F が u, v の分数多項式となって、一般には複雑である。１入力線形ＣＣＲモデルでは、

Mathematical Programming Formulation of Relative Efficiency Model

Masaaki SHINOHARA and Ken SHINOHARA

$$A_k = u^T y_k \qquad (5)$$

となり、従って、

$$\mathrm{F} = u^T y_{av} \qquad (6)$$

但し、

$$y_{av} = (y_1 + y_2 + \ldots + y_n)/n \qquad (7)$$

$y_{av} = 1, \quad u^T 1 = 1 (u \geq 0)$ と正規化すれば、

$$\mathrm{R}_k = u^T y_k \to \max \qquad (8)$$

subject to $u^T 1 = 1$

$u \geq 0$

となり、自明な定式化になってしまう。

(３－３)　仮想入出力毎平均の絶対効率値

仮想入出力毎平均とは、(３－２)のシステム毎の絶対効率値の平均とは異なり、総仮想入力値 VI と総仮想出力値 VO を計算し、その比率を平均値とする考えである。すなわち、

Ｆ＝総仮想出力値／総仮想入力値

＝VO／VI　(９)

$$\mathrm{VO} = \sum_j u^T y_j = n u^T y_{av} \qquad (10)$$

$$\mathrm{VI} = \sum_j v^T x_j = n v^T x_{av} \qquad (11)$$

従って、ある単一の平均的システム(x_{av}, y_{av})との相対比較となり、これもある程度自明な定式化になってしまうが、LP 解法が可能である。

(３－４)　仮想入出力毎平均の意味での重複許容する２つのシステムの平均

本来なら演算Ｆ(　)に、絶対効率値に関する第２最大値の働きをもたせることにより、直接的に、「第２最大値」あるいは「第１と第２の平均」との相対比較を行うことが好ましいし、モンテカルロ法によりその計算も可能である。しかし、本論文では容易な数理計画定式化の観点より、標題のアプローチをあえて採用する。すなわち、

$$\mathrm{F}(u, v, x_1, .., x_n, y_1, .., y_n)$$
$$= \max\{u^T (y_1 + y_2)/v^T (x_1 + x_2), u^T (y_1 + y_3)/$$
$$v^T (x_1 + x_3), \ldots, u^T (y_{n-1} + y_n)/v^T (x_{n-1} + x_n)\} \qquad (12)$$

すなわち、すべてのペア(対)のシステムの平均的挙動を持つ $n(n-1)/2$ 個のシステム (x_{ij}, y_{ij}) の群 $(i \neq j)$ との相対比較になる。ここでペアシステム (x_{ij}, y_{ij}) $(i = j)$ は追加すべきでないと考える。また、三組システム (x_{ijk}, y_{ijk}) を考えれば、ベスト３までの影響を何らかの形で実効的に考慮できると思う。以上、いずれも元のシステム群データから別のシステム群データを作り出して、それに対して、DEA－CCR モデルを適用するものであり、LP 解法が可能である。

４．おわりに

相対効率モデルにおいて、様々な分母と分子を想定することにより、様々な相対効率値を考えることが出来る。その中でも、容易な数理計画定式化が可能なクラスを提示したが、いずれも、原入出力データ $\mathrm{X} = \{x_1, .., x_n\}, \mathrm{Y} = \{y_1, .., y_n\}$ から変形入出力データ X'、Y'を作成し、これに従来手法(CCR)を適用することに相当する。

相対効率モデルは、最終的にはモンテカルロ法によるシステム毎最適化が可能であるが、それに頼る前に、容易に解けるクラスを明らかにすることは、計算機パワーの有効利用の点で意味がある。

相対効率モデルのさらなる一般化（(３)式、(４)式など）が今後の課題である。