マルチマネー系の時間価値動的システム

日大生産工　　篠原正明
情報システム研究所　篠原　健

１．はじめに

単一の通貨(例えば、円)に注目して、それの時間価値動的挙動は連続利子率 $r(t)$ を用いて微分方程式により記述できる。そこで、複数の通貨(例えば、円、ドル、ユーロ、など)に注目して、それらの時間価値動的挙動を線形連立微分方程式系による記述するアプローチを提案する。２章では、単一通貨系の動的システムの連続版と離散版を復習する。３章では、連続版の複数通貨動的システムを定式化し、４章では、その近似として、離散版の複数通貨動的システムを定式化する。５章では、数値例を示す。

２．単一通貨システムの復習

$x(t)$：時点 t での通貨価値
$r(t)$：時点 t での利子率

とすると、次式が成立する。

$$\Delta x(t) = r(t)x(t)\Delta t \qquad (1)$$

あるいは、

$$\frac{dx}{dt} = r(t)x \qquad (2)$$

(２)の一般解は、次式で与えられる。

$$x(t) = x(0)\exp\left(\int_0^t r(s)ds\right) \qquad (3)$$

利子率 $r(t)$ が時不変の場合は $(r(s) = r)$、

$$x(t) = x(0)\exp(rt) \qquad (4)$$

さて、Taylor 展開により、$\exp(\mathrm{X}) = 1 + \mathrm{X} + \mathrm{X}^2/2 + \ldots$ で、$rt \ll 1$ では、$\exp(rt) \fallingdotseq 1 + rt$ と近似できる。上式で $t = 1$ とし、これを反復適用すれば離散近似式として、

$$x(t) = x(0)(1 + r)^t \qquad (5)$$

を得る。

ここで、(５)式は、現価 $x(0)$ と終価 $x(t)$ の変換式と見ることができる。

３．連続版複数通貨システム

$\mathbf{x}(t)$：時点 t での通貨価値列ベクトル
$\mathrm{R}(t)$：時点 t での相互利子率行列

とすると、次式が成立をする。

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathrm{R}(t)\mathbf{x} \qquad (6)$$

さて、ここで、$\mathrm{R} = \{r_{ij}\}$ であるが、r_{ii} は通貨 i 自身の利子率、r_{ij} は通貨 j が通貨 i の時間価値変化に与える影響としての相互利子率という概念である。

(６)式の一般解は、次式で与えられる。

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0)\exp\left(\int_0^t \mathrm{R}(s)ds\right) \qquad (7)$$

利子率行列が時不変の場合は $(\mathrm{R}(s) = \mathrm{R})$、

$$\mathbf{x}(t) = \exp(\mathrm{R}t)\mathbf{x}(0) \qquad (8)$$

４．離散版複数通貨システム

(８)式を Taylor 展開して、１次近似するならば、

$$\mathbf{x}(t) = \left(I + \mathrm{R}t + (\mathrm{R}t)^2/2 + \ldots\right)\mathbf{x}(0)$$

$$\fallingdotseq (I + \mathrm{R}t)\mathbf{x}(0) \qquad (9)$$

さらに、$t = 1$ を代入し、これを反復適用すれば、

$$\mathbf{x}(t) = (I + \mathrm{R})^t\,\mathbf{x}(0) \qquad (10)$$

ここで、(10)式は、マルチマネー現価ベクトル $\mathbf{x}(0)$ と終価ベクトル $\mathbf{x}(t)$ の(離散版)変換式と見ることができる。

Dynamics of Time-value of Multi-money-currency System
Masaaki SHINOHARA and Ken SHINOHARA

5．数値例

例 1：2 通貨系で無相関の場合

$$\mathrm{R} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix} \qquad (11)$$

第一通貨(百円)の利子率$r_{11} = 0.1$、第 2 通貨(ドル)の利子率$r_{22} = 0.2$で、相互作用は存在しないとする。

(10)式より、$t = 2$、$\mathbf{x}(0) = (1,1)^T$とすると、

$$\mathbf{x}(t) = (I + \mathrm{R})^t\, \mathbf{x}(0)$$

$$= \begin{pmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.2 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1.21 & 0 \\ 0 & 1.44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1.21 \\ 1.44 \end{pmatrix}$$

すなわち、相互作用が存在しないので、単一システムの換算式を個別適用した結果と同じである。

例 2：2 通貨系で相関有りの場合

$$\mathrm{R} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.05 \\ -0.05 & 0.2 \end{pmatrix} \qquad (12)$$

(10)式より、$t = 2$、$\mathbf{x}(0) = (1,1)^T$とすると、

$$\mathbf{x}(t) = (I + \mathrm{R})^t\, \mathbf{x}(0)$$

$$= \begin{pmatrix} 1.1 & 0.05 \\ -0.05 & 1.2 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1.2075 & 0.115 \\ -0.115 & 1.4375 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1.3225 \\ 1.3225 \end{pmatrix}$$

すなわち、相互作用のため、偶然にも($r_{11} + r_{12} = r_{21} + r_{22}$だから)、$\mathbf{x}(t)$の各要素は等しくなる。これは、対象期間に円高傾向が存在し、$r_{12}(t) > 0$となったためである。

６．今後の課題

(6-1)相互利子率$r_{ij}(i \neq j)$に関しては、何らかの関係制約式、例えば,

$K_{ij} r_{ij} x_i + r_{ji} x_j = 0$、あるいは、単一通貨換算系では，$r_{ij} x_i + r_{ji} x_j = 0$が成立すると考えられるが、その妥当性ならびに係数測定法は？

(6-2)複数通貨系の為替レート行列から、通貨固有ウェイトを推定するのに一対比較を採用するアプローチ〔１〕との関連性は？

(6-3) $\mathbf{x}(0)$の初期設定法？

(6-4)マルチマネー版 IRR の問題

マルチマネー版初期投資ベクトル$\mathbf{x}(0)$が与えられた下で、マルチマネー版キャシュフローベクトル時系列

$\{\mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \ldots, \mathbf{x}(T)\}$が与えられた時に、

$$(I + \mathrm{R})^T\, \mathbf{x}(0) = (I + \mathrm{R})^{T-1}\, \mathbf{x}(1) + \ldots + \mathbf{x}(T)$$

を満足するマルチマネー版内部収益率行列 R を計算する問題をマルチマネー版 IRR の問題と定義する。

これは、例えば、日米両国に資本投下し、国別に投資額、報酬額キャシュフローベクトル時系列が与えられる時に、国別投資キャシュフローベクトルに対する等価な国別利子率と 2 国間為替変動率を推定する事に相当する。

参考文献

〔1〕坂本美由紀、篠原正明：
外国通貨ウェイトの一対比較理論による分析、第３５回日大生産工学術講演会数理情報部会論文集、7-10、pp.29-30(2002.12)