

AHP と DEA の発祥地と人を訪ねて

—AHP と DEA の共通視点とその発展—

日大生産工 篠原正明
情報システム研究所 篠原 健

1. はじめに

2004 年 8 月の米国短期留学では、AHP と DEA の発祥地を訪ねると共に、発明・開発者から直接にお話を伺い、さらに意見交換により、筆者独自の「AHP と DEA の共通視点とその発展」に関する研究を深めたので、ここに報告する。

2. AHP について

意思決定者(あるいはグループ)が直面する課題を「目標→評価基準→代替案」という風に階層構造に分解する。次に、目標から見た各評価基準の重要度(ローカルウェイト)ならびに、各評価基準から見た各代替案の重要度(ローカルウェイト)を**対比較**という手段を用いて推定する。最後に、目標から各代替案に至る様々なパス(思考経路に対応)に沿ってローカルウェイトを乗算したパスウェイトを統合化して、代替案毎にグローバルウェイトを計算する。意思決定者は、グローバルウェイトが大きい代替案を優先的に選択することになる。また、パスウェイトやローカルウェイトの分布により、直面する意思決定問題を分析することも可能である。

次に、私流に記号を用いて簡潔に解説する。代替案 k の総便益ウェイト合計(グローバルウェイトに対応) B_k は、便益項目の評価ベクトル

u が与えられると、

$$B_k = u^T b_k \quad (1)$$

で評価される。但し、 b_k は代替案 k の属性ベクトルで、 u も b_k も列ベクトル、 T は転置を表す。AHP の意思決定枠組は、便益項目の評価ベクトル u が与えられた下で、 $\max_k \{B_k\}$ を実現する k を見出す点にある。

3. DEA について

車の燃費評価のように 1 入力 1 出力のシステムでは、適当な前提の下では効率値は「出力値/入力値」で評価することができる。車の燃費評価では、入力値＝消費ガソリン量、出力値＝走行距離である。それでは、複数の入力項目、複数の出力項目をともなうシステムでは、どのように効率値を評価すべきであろうか？(ここで、若干のいいかげんさを許してもらえらば、入力は原因、コスト、原料、出力は結果、**便益**、生産物などと読み換えられる。)その答えの 1 つが DEA であり、複数の入力値を項目毎に重み付け合計した仮想入力値と複数の出力値を項目毎に重み付け合計した仮想出力値を用いて、「仮想出力値/仮想入力値」で効率値を評価する。但し、重み付けのし方に自由度が残るので、**評価対象となるシステム毎に最も都合な、**

すなわちその効率値最大を達成する重み付けを採用することを許容する。従って、DEA では注目するシステムの効率性を、自分も含めた全システムの中で相対的に最も有利に推定することになる。

次に、私流に記号を用いて簡潔に解説する。代替案 k (以下では、システム k と呼ぶ) の便益項目属性列ベクトル b_k 、コスト項目属性列ベクトル c_k が与えられると、システム k の絶対効率値 A_k は、

$$A_k = u^T b_k / v^T c_k \quad (2)$$

で評価できる。但し、 u は便益項目の評価列ベクトルで、 v はコスト項目の評価列ベクトルである。もし、 v と u が与えられれば、 $\max \{A_k\}$ を与えるシステムが最も効率的となるわけだが、DEA の枠組では、以下の2点で AHP の枠組と異なる。

1. 相対効率値を用いる
2. 被評価システム毎に最も有利な u, v を用いる

相対効率値とは、 u, v が与えられたときに絶対効率値最大(フロンティア)の対象と比較した時の相対値であり、システム k については、

$$R_k(u, v) = A_k / \max_j \{A_j\} \quad (3)$$

で定義する。最後に、システム k の DEA 効率値 z_k は、 $R_k(u, v)$ を u, v について $u \geq 0, v \geq 0$ の範囲で最大化することにより得られる値である。

$$z_k = \max_{(u, v)} R_k(u, v) \quad (4)$$

4. PC 選定における AHP と DEA

以下に示す4つの PC 機種選定のためのデータ表が与えられたとしよう。

PC 機種		1	2	3	4
コスト項目 $C=(c_1, c_2, c_3, c_4)$	価格 (十万円)	2.0	1.0	1.8	2.0
	重量 (Kg)	3.0	2.5	1.0	3.0
便益項目 $B=(b_1, b_2, b_3, b_4)$	主メモリ (百 M Byte)	5.0	3.0	1.0	4.0
	CPU 速度 (GHz)	10.0	1.0	4.0	8.0

例1：便益 AHP 法

AHP で便益項目にのみに注目し、「主メモリ」と「CPU 速度」を同程度に評価すれば(この表現は、正確には各行データが正規化されてれば妥当)、 $u = (1, 1)^T$ となり、
 $B_1 = u^T b_1 = 5 + 10 = 15$, $B_2 = u^T b_2 = 4$,
 $B_3 = 5$, $B_4 = 12$ となり、代替案1が選定される。

例2：便益ーコスト AHP 法

AHP で便益項目のみならずコスト項目を考慮するためには、すべての項目(要因あるいは属性とも言う)を便益項目に強制変換する減算アプローチがある。ここでは簡単に、マイナス評価をコスト項目に行うことにより、便益項目に加算しよう。例えば、
 $u = (1, 1)^T$, $v = (-1, -1)^T$ とすると、

$$B_1 = u^T b_1 + v^T c_1 = 5 + 10 - 2 - 3 = 10,$$

$$B_2 = 0.5, \quad B_3 = 2.2, \quad B_4 = 7$$

となり、この例でも代替案1が選定される。

例3：便益/コスト AHP 法

便益とコストの差ではなく、比率で評価する Benefit/Cost AHP 法である。例えば、

$$v = (1, 1)^T, \quad u = (1, 1)^T \quad \text{とすると、}$$

$$B_1 = 15/5 = 3, \quad B_2 = 4/3.5,$$

$$B_3 = 5/2.8, \quad B_4 = 12/5 \text{ となり、この例でも}$$

代替案 1 が選定される。

例 1～3 以外にも様々な指標を持つ AHP 法が存在しうるが、共通しているのは、 u, v などの評価ベクトルを固定した下で、どの代替案が注目する指標を最適化するか、である。もちろん、他の(u, v)の値について指標を再計算したりする枠組もありうるが、これは一種のパラメトリック AHP と呼ばれる。これに対して、DEA 法は、各 PC の身になって(あるいは PC 製造業者になったつもりで)、自社 PC の価値を他社との相対比較において最高に高めるためには、どのような評価ベクトルを各社毎に持つべきか、さらに、そのときの自社 PC はトップレベル(フロンティアと言う)に並ぶるか?もし、フロンティア上に存在しないならば、そのかい離度合はいか程か、…というスタンスに立っている。

例 4 : DEA(その 1…機種 1 に有利な評価)

DEA は、便益/コスト AHP のパラメトリック分析と位置づけられる。すべての項目を同等とした場合、 $v = (1, 1)^T$, $u = (1, 1)^T$ 、について、絶対効率値 A_k , 相対効率値 R_k を以下に示す。

代替案	1	2	3	4
絶対効率値 A_k	3	4/3.5	5/2.8	12/5
相対効率値 R_k	1.0	0.38	0.595	0.8

PC 機種 1 はこの評価の下では $R_1 = 1$ であり、フロンティア上にあると言える。

例 5 : DEA(その 2…機種 2 に有利な評価)

PC 機種 2 は価格のわりにはメモリが大きいので、価格とメモリの評価を強調し、 $v^T = (1, 0)$, $u^T = (1, 0)$ とする。

代替案	1	2	3	4
絶対効率値 A_k	2.5	3	1/1.8	2
相対効率値 R_k	0.833	1.0	0.185	0.667

すなわち、このように評価すれば、PC 機種 2 もフロンティア上に位置づけられ、多機種との相対比較でも見劣りしないと言える。

例 6 : DEA (その 3…機種 3 に有利な評価)

PC 機種 3 は重さが軽いわりには CPU スピードが速いので、重量と CPU 速度の評価を強調し、 $v^T = (0, 1)$, $u^T = (0, 1)$ とする。

代替案	1	2	3	4
絶対効率値 A_k	3.33	0.4	4	8/3
相対効率値 R_k	0.833	0.1	1.0	0.667

すなわち、このように評価すれば、PC 機種 3 もフロンティア上に位置づけられ、このパソコンメーカーは「軽くて速い」点を宣伝すれば効果的といえる。

例 7 : DEA(その 4…機種 4 に有利な評価)

機種 1～3 については、適切に評価ベクトル u, v を選べば、相対効率値 R_k ($k = 1, 2, 3$) を 1 にすることが可能であったが、機種 4 については、どんな評価ベクトル u, v を $u \geq 0, v \geq 0$ の範囲で選んでみても $R_4 = 1$ には到達できなかった。それでは、 R_4 をなるべく大きくする u, v はどのように選べばよいかである。その答は、例 4 での $v = (1, 1)^T$, $u = (1, 1)^T$ で $R_4 = 0.8$ である。すなわち、PC 機種 4 は、PC 機種 1 が存在するために、フロンティア上には存在し得ない。PC 販売戦線からは撤退したほうが無難というところである。

5. AHP と DEA の関係

AHP は複雑な意思決定問題に対する階層化

による単純化、DEA は市場原理が動作しない
公共政策プロジェクトの効率評価という風に、
AHP と DEA は従来個別に議論されて来たが、
意思決定枠組を数理モデルとして再考察する
と、今回の研究旅行(短期留学)の成果から判明
したように、密接な関係にあるといえる。極論
するならば、AHP では評価ベクトルが固定さ
れ、DEA では評価ベクトルが自由(と言うより
は、被評価対象で異なり得る)である。このよ
うな視点をとれば、AHP と DEA の融合も進
み、新しい評価手法も必要に応じて発生するだ
ろうし、さらに、評価ベクトルに自由度(従っ
て、最適化)を考慮した AHP、分数形にとらわ
れない DEA など個別の発展も進むと思う。

6. マインド遷移モデルからの解釈

AHP ならびに ANP に関しては、すでに筆
者らによるマインド遷移モデル(MTM)による
心理学的考察に基づく解釈が存在する [1]。
以下では、本報告の内容までにさらに発展させ
る。

MTM の考え方は人間のマインド(心、意識、
思考対象など)が、例えば、マルコフ連鎖など
に従って遷移するとする点にある。マルコフ連
鎖である必要はない。又、マインドと言っても
心理学的にどの層に注目するのか？個人かグ
ループか？等の疑問点も残るが当面の問題で
はない。

AHP の枠組では、MTM のマルコフ連鎖の
遷移確率行列は与えられており、それに基づき、
定常状態確率を計算すれば、状態が{代替案、
評価基準}に対応するので、定常状態確率がウ
ェイトとなる。すなわち、マインドが長く滞在
する代替案が好まれるわけである。

本報告書の AHP の研究成果より MTM に関
して言えることは、便益面の心の動きとコスト
面の心の動きという風に複数面のマルコフ連
鎖が存在するという事である。すなわち、
我々の内に便益マインドとコストマインドが

存在するという事であろう。それ以外の〇〇
マインドなるものも存在し、それらを多元的に
扱わねばならない。さらに、非線形の指標を考
慮すべきである。

DEA の研究成果より言えることは、MTM
の遷移確率行列の適当な行(便益評価項目とコ
スト評価項目に対応する行)には自由度が存在
し、その自由度の範囲で適切な指標を最適化す
るのが DEA の枠組である。すなわち、マイン
ド遷移に自由度を残し、ある目標にとって好都
合になるように、その自由度の範囲内で、意思
決定するという事になる。すなわち、AHP
から DEA への視点をさらに一般化するなら
ば、………便益マインド、費用マインド、リ
スクマインド、機会マインド、などの各マイン
ドの下で代替案を評価し、その時に各マイン
ド内評価ベクトルに自由度を与えて、代替案 k の
指標を最適化する………となる。

7. おわりに

今回の米国短期留学では、AHP の発明者で
ある Saaty 博士を AHP の発祥地である
Pittsburgh 大学に訪ねた。さらに、DEA の発
明者である Cooper 博士を Texas 大学に訪問す
る予定であったが、Cooper 博士が入院中との
ことで、Cooper-Charnes 直系の日本人 DEA
研究者である末吉教授を New-Mexico 工科大
学(at Socorro)に訪ねた。

今回の短期留学中での AHP 発明者ならびに
DEA 研究者との意見交換にもとづき、筆者独
自の「AHP と DEA」に関するアイデアを発展
させた。この報告書が、AHP と DEA に興味
を持つ人にとっての入門解説書にもなればと
も思い、本報告書をまとめた。

参考文献

- [1] K.Ohsawa, C.Miyake and M.Shinohara :
Mind Transition Model—A Unified Model of
AHP and ANP, Proceedings of 7th ISAHP,
pp.369-380(2003).