

スラックを考慮した DEA による効率性評価の 2, 3 の試み

日大生産工(学部) ○南柿 正博

日大生産工 篠原 正明

1. はじめに

複数の事業体 (DMU) の効率性を調べる方法として DEA (Data Envelopment Analysis) という手法がある。DEA を用いると平均ではなく、各事業体の特性を活かした評価が可能となる。

本研究では DEA の CCR モデルの問題点である「スラック」を考慮した効率性評価の方法を試みる。

2. スラック

スラックとは、入力の余剰や出力の不足のことである。

1 入力・2 出力の場合の簡単なスラックの例を以下の図 1 を示す。以下の図では A と B が効率的フロンティア面上にあり同じ効率値となっているが、A は B より出力 2 の値が小さい (出力が不足している) のでスラックとなっている。

出力 1 / 入力

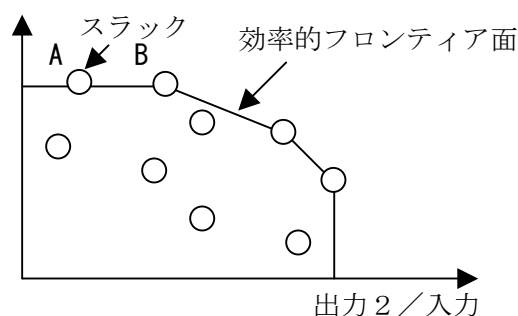


図 1. スラックの例

3. CCR モデルー相対効率モデルー

CCR モデルは Charnes-Cooper-Rhodes によ

って、1978 年に提案された DEA の最初のモデルである。

CCR モデルの一つの解釈モデルとして、相対効率モデルがある。

本論分で使用する記号等は次のような意味を持っている。

r_0 : DMU₀ の効率値

u : 出力項目の評価ベクトル

v : 入力項目の評価ベクトル

x_j : DMU_j の入力項目のベクトル

y_j : DMU_j の出力項目のベクトル

x_0 : DMU₀ の入力項目のベクトル

y_0 : DMU₀ の出力項目のベクトル

相対効率モデルの目的関数は (1) 式、制約条件は (2) 式で表される。

$$r_0 = \frac{\frac{u^T y_0}{v^T x_0}}{\max_j \left\{ \frac{u^T y_j}{v^T x_j} \right\}} \rightarrow \max \quad (1)$$

$$u \geq 0, \quad v \geq 0 \quad (2)$$

従来は、3 段階の LP を解くことで求めた加重最大スラック解をもとに修正効率性 (T 効率性) を求めることにより、スラックを考慮した効率性評価を行っている ([1]) が、本研究ではそれとは異なり、相対効率モデルにおいて分母の基準となる絶対効率値として、2ndmax を考慮することにより、結果としてスラックを考慮した効率性評価法を提案する。

4. 相対効率モデルの検討

4. 1 分母に 2ndmax を適用

相対効率モデルの分母に max の代わりに 2ndmax を適用する。目的関数は (3) 式、制約条件は (2) 式とする。

$$r_0 = \frac{\frac{u^T y_0}{v^T x_0}}{2nd \max_j \left\{ \frac{u^T y_j}{v^T x_j} \right\}} \rightarrow \max \quad (3)$$

4. 2 分母に max と 2ndmax との平均を適用

相対効率モデルの分母に max の代わりに max と 2ndmax との平均を適用する。max と 2ndmax は同じ値でも良いとする。目的関数は (4) 式、制約条件は (2) 式とする。

$$r_0 = \frac{\frac{u^T y_0}{v^T x_0}}{\frac{1}{2} \left[\max_j \left\{ \frac{u^T y_j}{v^T x_j} \right\} + 2nd \max_j \left\{ \frac{u^T y_j}{v^T x_j} \right\} \right]} \rightarrow \max \quad (4)$$

4. 3 分母に max と 2ndmax との平均を適用 (但し、max ≠ 2ndmax)

相対効率モデルの分母に max の代わりに max と 2ndmax との平均を適用する。但し、max と 2ndmax は違う値でなければならないとする。目的関数は (4) 式、制約条件は (2) 式と (5) 式とする。

$$\max_j \left\{ \frac{u^T y_j}{v^T x_j} \right\} \neq 2nd \max_j \left\{ \frac{u^T y_j}{v^T x_j} \right\} \quad (5)$$

4. 4 分母に平均を適用

相対効率モデルの分母に max の代わりに平均を適用する。目的関数は (6) 式、制約条件は (2) 式とする。

$$r_0 = \frac{\frac{u^T y_0}{v^T x_0}}{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{u^T y_j}{v^T x_j} \right\}} \rightarrow \max \quad (6)$$

4. 5 分母に各 DMU の中間点で構成された max を適用

相対効率モデルの分母に max の代わりに各 DMU の中間点での max を適用する。目的関数は (7) 式となる。

$$r_0 = \frac{\frac{u^T y_0}{v^T x_0}}{\max_{i \neq j} \left\{ \frac{u^T (y_i + y_j)}{v^T (x_i + x_j)} \right\}} \rightarrow \max \quad (7)$$

5. 数値シミュレーション

今回の数値シミュレーションの例題として、1 入力 2 出力の場合を考える。以下の表 1 のデータをもとに、各事業体に対して、u1, u2 をそれぞれ 0 ~ 100 まで推移させ (101 × 101 通り)、最も大きい効率値を求める。

事業体	A	B	C	D	E	F	G	H	I
入力	1	1	1	1	1	1	1	1	1
出力 1	1	2	3	4	4	5	6	1	0.5
出力 2	5	7	4	3	6	5	2	7	5

表 1. 1 入力 2 出力のデータ

表 1 のデータを元に通常の相対効率モデルでシミュレーションを行うと以下の結果が出る。

事業体	出力 1	出力 2	効率値	u1	u2
A	1	5	0.714286	0	1
B	2	7	1	0	1
C	3	4	0.7	1	1
D	4	3	0.75	3	1
E	4	6	1	1	1
F	5	5	1	1	1
G	6	2	1	1	0
H	1	7	1	0	1
I	0.5	5	0.714286	0	1

表 2. 通常の相対効率モデルによる結果

表 2 の効率値は各事業体の最も大きい効率値の値であり、 u_1, u_2 はそのときの評価ベクトルの値である。但し、最も単純な u_1, u_2 の値を代表値として示した。例えば、事業体 A の場合に、 $(u_1=0, u_2=2)$ 、 $(u_1=0, u_2=3)$ 、・・・でも効率値が 0.714286 となったが、これらを $(u_1=0, u_2=1)$ で代表した。

ここで、事業体 B と事業体 H について注目する。出力 2 が同じ値で、出力 1 が異なっているが、効率値は同じ値となっており、スラックが発生していることがわかる。同様に、事業体 A と事業体 I についてスラックが発生している。

この後の 6. シミュレーション結果では、このスラックを考慮した効率性評価となっているかに注目する。

6. シミュレーション結果

6. 1 分母に 2ndmax を適用した場合

事業体	出力 1	出力 2	効率値	u_1	u_2
A	1	5	1	0	1
B	2	7	1.464286	3	5
C	3	4	1.035714	3	5
D	4	3	1	1	1
E	4	6	1.5	3	5
F	5	5	1.428571	1	1
G	6	2	1.2	1	0
H	1	7	1.4	0	1
I	0.5	5	1	0	1

表 3. 2ndmax 適用結果

表 3 から、事業体 B>事業体 H となっており、スラックを考慮した効率性評価となっていることがわかる。しかし、事業体 A=事業体 I となっており、この部分についてはスラックが考慮されていないことがわかる。

6. 2 分母に max と 2ndmax との平均を適用した場合

事業体	出力 1	出力 2	効率値	u_1	u_2
A	1	5	0.714286	0	1
B	2	7	1.022222	1	3
C	3	4	0.705882	2	3
D	4	3	0.758621	2	1
E	4	6	1.019608	2	3
F	5	5	1.034483	2	1
G	6	2	1.090909	1	0
H	1	7	1	0	1
I	0.5	5	0.714286	0	1

表 4. $(\max + 2\text{ndmax}) / 2$ 適用結果

表 4 から、事業体 B>事業体 H となっており、スラックを考慮した効率性評価となっていることがわかる。しかし、事業体 A=事業体 I となっており、この部分についてはスラックが考慮されていないことがわかる。

6. 3 分母に max と 2ndmax との平均を適用 (但し、 $\max \neq 2\text{ndmax}$) した場合

事業体	出力 1	出力 2	効率値	u_1	u_2
A	1	5	1.027523	3	5
B	2	7	1.504587	3	5
C	3	4	1.12	1	1
D	4	3	1.454545	1	0
E	4	6	1.6	1	1
F	5	5	1.818182	1	0
G	6	2	2.181818	1	0
H	1	7	1.4	0	1
I	0.5	5	1	0	1

表 5. $(\max + 2\text{ndmax}) / 2$ 適用結果 ($\max \neq 2\text{ndmax}$)

表 5 から、事業体 B>事業体 H となっており、スラックを考慮した効率性評価となっていることがわかる。また、事業体 A>事業体 I となっており、スラックを考慮した効率性評価となっていることがわかる。

6. 4 分母に平均を適用した場合

事業体	出力 1	出力 2	効率値	u1	u2
A	1	5	1.022727	0	1
B	2	7	1.431818	0	3
C	3	4	1.018868	1	0
D	4	3	1.358491	5	0
E	4	6	1.358491	5	0
F	5	5	1.698113	5	0
G	6	2	2.037736	1	0
H	1	7	1.431818	0	3
I	0.5	5	1.022727	0	1

表 6. 平均適用結果

表 6 から、事業体 B=事業体 H、事業体 A=事業体 I となっており、スラックが考慮されていないことがわかる。

6. 5 分母に各 DMU の中間点で構成された max を適用

中間点と各 DMU をグラフにまとめたものを図 2 に示す。

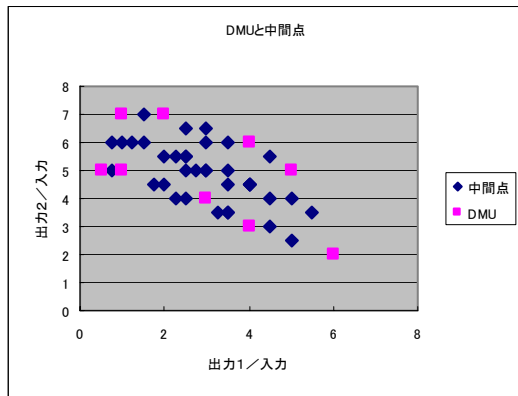


図 2. DMU と中間点

各 DMU をこれらの中間点によって評価した結果を表 7 に示す。

事業体	出力 1	出力 2	効率値	u1	u2
A	1	5	0.714286	0	1
B	2	7	1.022222	1	3
C	3	4	0.705882	2	3
D	4	3	0.758621	2	1
E	4	6	1.019608	2	3
F	5	5	1.034483	2	1
G	6	2	1.090909	1	0
H	1	7	1	0	1
I	0.5	5	0.714286	0	1

表 7. 中間点適用結果

表 7 から、事業体 B>事業体 H となっており、スラックを考慮した効率性評価となっていることがわかる。しかし、事業体 A=事業 I となっており、この部分についてはスラックが考慮されていないことがわかる

7. おわりに

今回の結果より、max と 2ndmax との平均(但し、max≠2ndmax)を適用することにより、スラックを考慮した効率性評価が可能となった。今回は 1 入力 2 出力の場合を考えたが、他の場合にも同じ結果が出るか検討していきたい。

また、効率値は通常 1 以下である必要があるが、今回は平均等を分母に適用したために 1 を越える結果になってしまった。超効率性の概念との関係の考察を今後の課題としたい。

また、通常 DEA では効率的な DMU 同士は同じ効率値(通常は 1)となり、それらに優劣は現れないが、今回の結果では優劣がつく形となった。この効率値に意味があるのかも今後の課題としたい。

8. 参考文献

[1] 刀根薫, 経営効率性の測定と改善, 日科技連, (1993), pp. 112-116