ハイブリッド振動法のための数値積分法

－無条件安定と等価な陽的積分法－

日大生産工(学部)　○扇谷 匠己　　日大生産工(院)　　矢作　貴
日大生産工　　神田　亮　　　　日大生産工　丸田 榮藏

1.　序論

ハイブリッド振動法[1] は、実験と解析を組み合わせ、その両者の利点を生かし、一つの現象をシミュレーションするもので、ハイブリッド式実験手法を、構造物の空力振動現象に適用したものである。

この手法では、離散化された時間上で、step-by-stepの数値積分と外力の測定を、交互に行いながら応答値を求める。したがって、通常のコンピュータ解析で行うstep-by-stepの数値積分よりは、はるかに多くの制約を満足しながら数値積分を行わなくてはならない。

本論文では、ハイブリッド振動法に適用するために、次ステップを陽的に求められる、また、無条件安定と等価であるといった特長を有する数値積分法を提案する。

2.　数値積分法の提案

2.1　ハイブリッド振動法に適用する数値積分法の制約

ハイブリッド振動法に適用される積分法の制約は、以下のようである。

① むやみに積分時間刻みΔt を小さくできない。
② 収束計算などの、繰り返し計算を含んではならない。
③ 塑性化、除荷、再載荷などの、急激な応力変化に対しても、精度良く追跡できなければならない。
④ 次ステップの応答値が陽的に求められること。

さらに、ここで述べた制約を受けても、この数値積分法は、安定で精度の良い解を求められなければならない。

2.2　数値積分法の概念

構造物の振動現象は、互いに独立な一般化座標系上の応答値の重ね合わせで表現することができる。通常、地震力や風外力の周波数特性を考慮すると、構造物の応答は、低次の周波数成分が卓越し、高次の成分は極めて小さいものとなる。

ここで提案する積分法は、制約②、③を考慮し、陽な積分法を基本とするが、構造物の振動特性を考慮して、モーダルアナリシスを適用し、各モード応答を求める。この際、全体の応答にはほとんど関係ないが、安定条件に影響を及ぼすような、高次モードの成分は計算しない。この結果、精度を確保することのみを考えて、積分時間刻みΔt の大きさを定めることができる。以下、本積分法は、陽なNewmark法にモーダルアナリシスを組み込んだ手法であるため、Modal-Explicit Integration Technique、または、M.E.T.と称す。ここで問題となるのは、モーダルアナリシスを、線形な系だけでなく、非線形な系に対しても適用できなければならない。この対策として、M.E.T.では、非線形な復元力を、常に一定の仮想剛性に寄与する成分と、不釣合い力の成分に分離する。一般化座標は、仮想剛性に対して定めたものとする。ここでは、不釣合い力を用いるが、制約②を満足すように、収束計算が必要でないことも合わせて示す。以下にその詳細を示す。

一般に、外力 f を受け、復元力が非線形な挙動を示す場合の多自由度振動系の運動方程式は、式 (1) のように表される。

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+r=f \tag{1}$$

ここに、m, c は、質量、減衰マトリクス、 $\ddot{x}$, $\dot{x}$ は、加速度、速度ベクトルを表す。今、非線形な挙動を示す復元力 r は、仮想剛性 k^I と不釣合力 r^u によって次のように表されるものとする。

$$r=k^I x-r^u \tag{2}$$

ここに、x は、変位ベクトルを表す。式 (2) を式 (1) に代入してr^u の項を右辺に移項すると、次式を得る。

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+k^I x=f+r^u \tag{3}$$

式 (3) は、一定な剛性k^I を有する振動系が、外力 $f+r^u$ を受ける場合の運動方程式[2] と見なせる。ここで、X , $\dot{X}$, $\ddot{X}$ は、一般化座標系上の変位、速度、加速度を表

Numerical Integration for Hybrid Vibration Technique

—Development of Explicit Integration Scheme Equivalent to Unconditional Stable—

Narumi OUGIYA, Takashi YAHAGI, Makoto KANDA and Eizou MARUTA

し、$x, \dot{x}, \ddot{x}$ の定義される座標系を実座標系と称す。式 (3) にモーダルアナリシスを適用すると、

$$M_k^{\,I}\ \ddot{X}_k^{\,I}+C_k^{\,I}\ \dot{X}_k^{\,I}+K_k^{\,I}X_k^{\,I} = F_k^{\,I}+R_k^{\,u,I} \tag{5}$$

但し、

$$M_k^{\,I}=\phi_k^{\,I,T}m\,\phi_k^{\,I},C_k^{\,I}=\phi_k^{\,I,T}c\,\phi_k^{\,I}$$

$$K_k^{\,I}=\phi_k^{\,I,T}k^I\,\phi_k^{\,I},x=\Sigma\,\phi_k^{\,I}X_k^{\,I}$$

$$F_k^{\,I}=\phi_k^{\,I,T}f,R_k^{\,u,I}=\phi_k^{\,I,T}r^u \tag{6}$$

ここに、上付き添え字T は転置、I は、仮想剛性 k^I に対する値、下付添え字 k はモード次数、ϕ はモードベクトルを表す。最高次のモード次数をm、支配的なモードの最高次数をm' とすると、式 (5) は、m 個の独立した方程式になる。式 (2) に対しても同様な操作を行うと、下式のようになる。

$$R_k^{\,I}=K_k^{\,I}X_k^{\,I}-R_k^{\,u,I} \tag{7.a}$$

但し、

$$R_k^{\,I}=\phi_k^{\,I,T}r \tag{7.b}$$

式 (7.a) を式 (5) に代入して整理すると、以下のようになる。

$$M^I\ \ddot{x}^I+C^I\ \dot{x}^I+R^I=F^I \tag{8}$$

式 (5) は、仮想剛性 k^I に対する一般化座標系上の振動方程式である。実座標系では、便宜的に r を式 (2) に示したように、仮想剛性に寄与する部分と、不釣合い力の部分に分離した。式 (3) を一般化座標系上に変換した式 (5) は、最終的に、式 (8) のように、R^I が仮想剛性に寄与する部分と不釣合い力の部分に区別されていない形式で表現できる。よって、Newton-Rapson 法等により収束計算を行わずとも、陽な方法を適用すれば、解が求められる。ここでは、式 (8) に基づき、時間を離散化し、各モードの応答計算を、陽なNewmark法で求める。この時、高次の振動成分は、計算しない。

ここまで述べてきた、M.E.T.の特長に基づき、**Fig.1**にM.E.T.をハイブリッド振動法に適用した場合のフローチャートを示す。計算手順は、外力と復元力の算定の前後に、応答値を座標変換することを除いては、陽なNewmark 法を適用した場合と同様である。また、応答値の計算は、すべて一般化座標系上で行われる。しかし、非線形な挙動を示す復元力は、容易に値を求められる実座標系上で算定するのが合理的である。

3.　数値実験

3.1　数値実験１

ここでは、まず、振動系が $\omega_m\ \Delta t>2$ の高次モードを含んでいても、M.E.T.は、精度の良い解を得られることを確かめる。M.E.T.で求めた解は、線形加速度法で求めた解（以下、基準解１）と比較し、その精度を検証する。ここで用いる振動系モデルを、各質量、バネ定数、固有円振動数ともに、**Fig.2**に示す。このモデルは、最下層にダンパーを有する構造物を想定したせん断５質点系モデルで、ダンパーの軸変形により１層床面が回転を起こし、上部構造が水平に変形することを想定したものである。塑性化するバネ、すなわち剛性が未知のバネk^a を、２層に設定し、数値実験１では、一定とする。仮想剛性k^I は k^aと等しくして、M.E.T.の精度を検証する。また、k^I の値が応答値の精度に与える影響を知るために、k^I/k^a =0.5, 10 についても解析を行う。解析に用いる減衰は、仮想剛性に対して直交性を有するように定めた。各モードにおける減衰定数は*0.01*とした。

使用する外力では、振動系の２次の固有円振動数までは一定のパワーを有し、それ以降は全くパワーのない振幅モデルを想定した。また、位相は一様乱数によりモデル化した。これらのモデルに基づいて、各周波数成分の正弦波の振幅と位相を定め、それらを各時刻において重ね合わせることによって、時刻歴上の外力を求めた。１層が免震装置を有することを想定しているモデルであるため、質点１を除く、各質点に外力を作用させた。各質点に作用する外力の相関性は*0*とした。このような外力により得られる応答値は、２次モード以下が支配的になることが予測される。

基準解１の積分時間刻み Δt_E は、$\omega_m\ \Delta\ t_E<2$かつ、$\omega_{m'}\Delta t_E<0.5$を満足するよう$\Delta t_E=0.01$と設定した。M.E.T. の積分時間刻み$\Delta t_M$ は、$\omega_{m'}\Delta t_M<0.5$のみ満足するよう$\Delta t_M=0.1$と設定した。本解析では、$\omega_5\Delta t_M=$ 3.164となる。これら2つの積分時間刻みの関係は、$\Delta t_E\times 10=\Delta t_M$ となる。なお、ステップ数は、基準解１を求める際は、*40951*とし、M.E.T.を用いる際は、*4096*とした。解析を行うにあたり、支配的なモードの最高次数 m'、すなわち重ね合わせるモード次数は４次モードとする。

上記のような条件により解析を行った結果を**Fig.3**に示す。これらのFig.は、振動系モデルにおける質点２の応答変位及び応答加速度の時刻歴である。

Fig.3からも分かるように、同じΔtで、陽なNewmark法を用いて求めた応答値は、発散しているにもかかわらず、M.E.T.の解は発散していない。$k^I/k^a=0.5, 1$ は、精度の良い基準解１とよく一致している。

これらのことから、Δt が大きくても、$\omega_{m'}\Delta t<0.5$を満足すれば、M.E.T.は、安定かつ精度の良い解が求められることが分かった。しかし、k^I/k^a=10では、M.E.T.で求めた解は、発散はしていないものの、基準解１と多少の違いが見られる。

3.2　数値実験２

数値実験１では、剛性が未知なバネk^aを一定としてきた。しかし、復元力特性が、非線形である場合は、バネk^aの剛性が時々刻々変化する可能性が、十分考えられる。そこで、数値実験２では、バネk^aを非線形なものとし、M.E.T.を用いて、非線形挙動を精度良く追跡できるか否かを検討する。

M.E.T.で求めた解は、陽なNewmark法で求めた解（以下、基準解２）と比較し、その精度を検証する。陽なNewmark法は、線形加速度法よりも数値積分の精度は劣るが、次ステップの解を求めるために、剛性を必要としないため、非線形な復元力に対しては、精度の良い解が得られる。さらに、この手法は、積分時間刻みを十分細かくすれば、線形加速度法と同等な精度を得ることも知られている[3]。

解析に用いる復元力特性は、代表的な二つの剛性で履歴特性が表せるバイリニア型とする。バイリニア型の復元力特性を用いる際の各パラメータは、初期剛性が*1*、バイリニア係数が*0.07*、降伏変位が*3.5*、塑性率が約*15*とした。塑性率は約*15*と、多少、非現実的な値としてあるが、これは、弾性時と塑性時のモード形状が変化し、等価な線形系には、置換しにくい場合でも、M.E.T.が、精度の良い解を求められるか否かを調べるためである。

また、数値実験１で用いたk^aを、ここでは、履歴曲線において、最大応答変位時と最小応答変位時の値を直線で結んだ傾きとし、k^a＝0.14とした。さらに、$k^I/k^a=1$とした。解析諸元は、数値実験１と同様とする。積分時間刻み、ステップ数は、基準解２を求める際には基準解１と同様$\Delta t=0.01$、*40951*とし、M.E.T.を用いる際は、数値実験１と同様$\Delta t=0.1$、*4096*とする。

数値実験2の結果を**Fig.4**に示す。示された時刻歴のモデル、質点位置は、数値実験１の場合と同様である。これらの解析結果をみると、M.E.T.は、非線形挙動下であっても、良好な解を得られる事が分かった。

4.　まとめ

ここまで、ハイブリッド振動法に適用するための数値積分法として、陽な積分法に、非線形挙動下でも実施可能なモーダルアナリシスを組み込んだ手法を提案した。また、数値実験によって、その有効性を検討してきた。その結果、以下のような知見を得た。

1. M.E.T.は、応答が卓越する最高次のモード成分に対し精度を確保するように、Δtを定めさえすれば、安定で精度のよい解が得られる。応答値の卓越しないモード成分に対し安定条件を確保するために、Δtを定める必要がない。
2. M.E.T.は、塑性率が大きく弾性時と塑性時でモード形状が変化し、等価な線形系には置換しにくいバイリニア型の履歴特性において、良好な精度を得られることが、確認された。
3. 仮想剛性k^Iは、応答値の精度に多少影響を与える場合があるので、注意して定める必要がある。

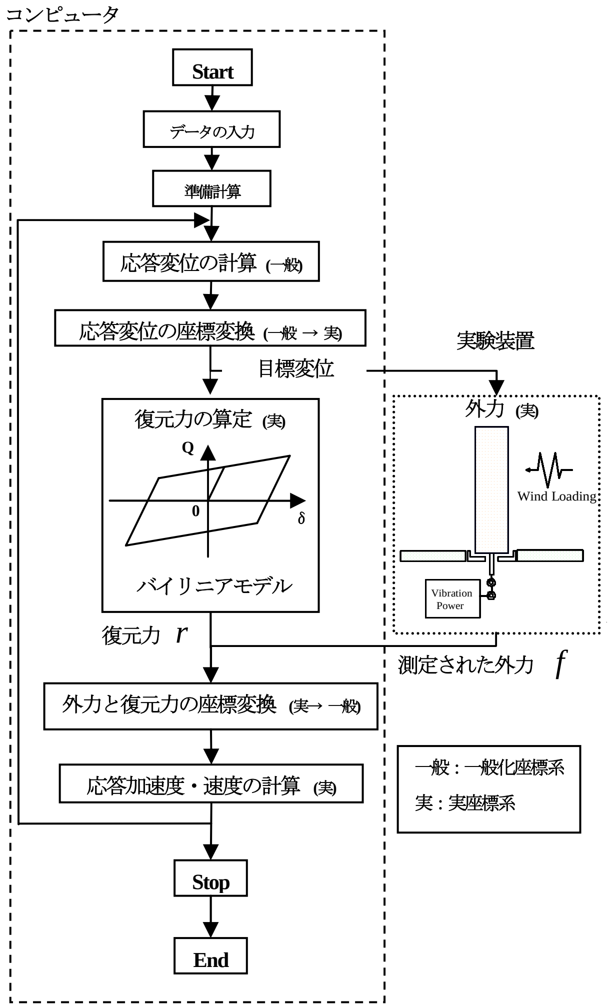
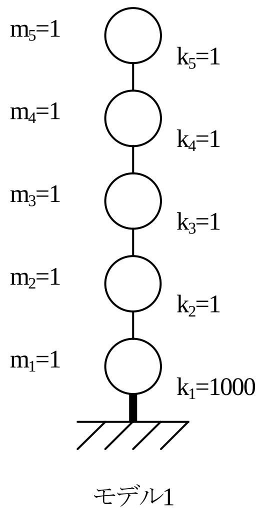


Fig.1 M.E.T.を適応したハイブリッド振動法のフローチャート



固有円振動数 ω	
1st	0.3472
2nd	0.9998
3rd	1.5319
4th	1.8793
5th	31.6386

Fig.2 解析モデル

「参考文献」

1）M. Kanda, A. Kawauchi, T. Koizumi, E. Maruta：A new approach for simulating aerodynamic vibrations of structures in a wind tunnel -development of an experimental system by means of hybrid vibration technique-, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, Vol.91, pp.1419-1440, 2003.

2）Roberto Villaverde, Melad. M. Hanna : Efficient Mode Superposition Algorithm for Seismic Analysis of Non-Linear Structures, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 21, 849-858 (1992).

3）Shing, P. B and Mahin, S. A.: Experimental Error Propagation in Pseudodynamic Testing, EERC Report No. UCB/EERC-83/12, 1983.

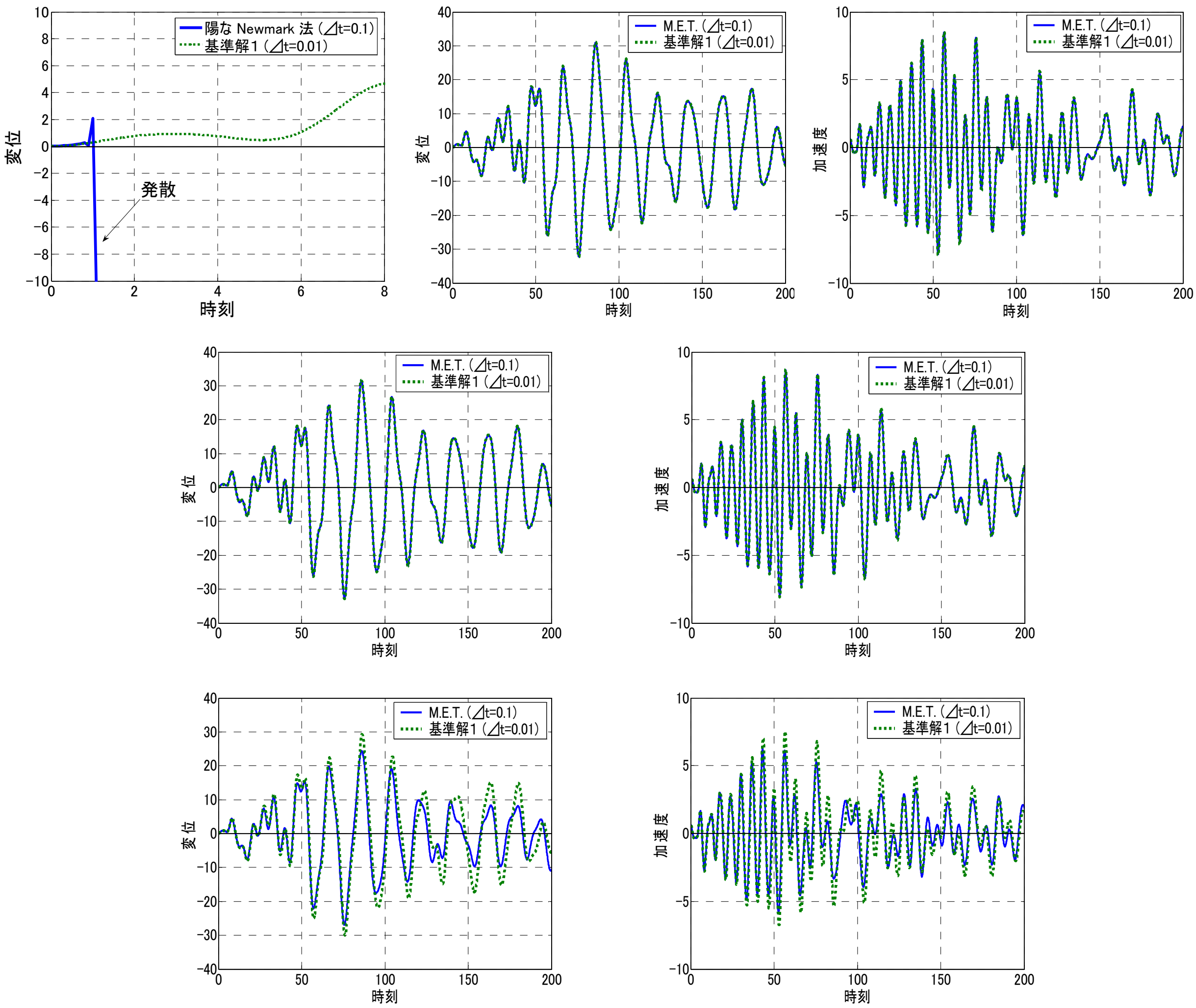


Fig.3 時刻歴の応答値（質点２、上段k^I/k^a=1、中段k^I/k^a=0.5、下段k^I/k^a=10）

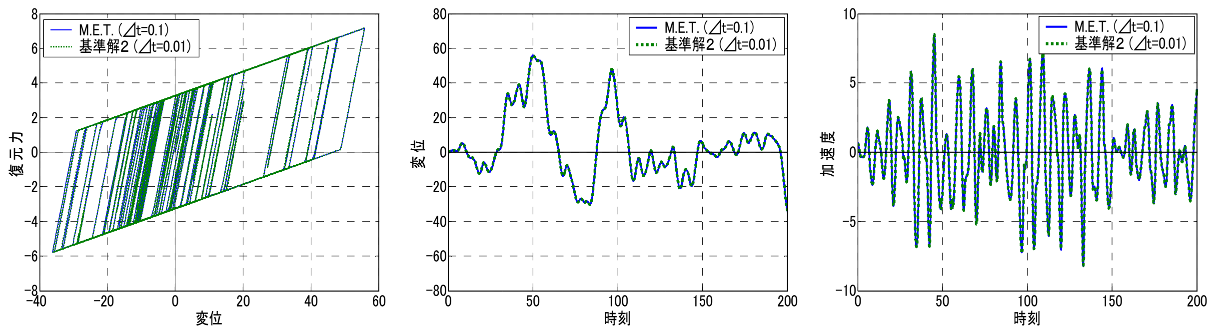


Fig.4 時刻歴の応答値（質点２、k^I/k^a=1）