載荷端面摩擦を考慮した有限円柱の弾性解析

日大生産工(院)　○松島　敏範　　日大生産工(院)　滝沢　孝充
日大生産工　　　　秋葉　正一　　日大生産工　　　栗谷川　裕造

1　まえがき

土木材料（土，コンクリート，アスファルト混合物など）による円柱供試体の一軸または三軸圧縮試験では，載荷端面における端面拘束の影響により，圧縮強度や破壊形状がかなり影響を受けることが多くの実験的あるいは解析的研究により知られている．この問題の解析的な研究として，梶田ら[1)]による FEM を用いた解析や渡辺[2)]による応力関数法を用いた弾性解析などがある．破壊機構は材料特性の違いにより，必ずしも線形弾性解析だけで説明できない困難な問題であるが，それでも弾性解析は問題解決の基礎となるばかりではなく，弾性的な材料評価を実施する上での有効な手段となり得る．

そこで本研究では，前述した研究成果が当時の大型コンピューターで計算された若干の数値解析結果で，日常的に実施される試験結果の解釈を行うには汎用性の欠けていること，コンピューター技術の発展により，このような弾性解析はパソコンレベルで解析可能であることから，自ら解析プログラムを開発することにより解析上の問題点を理解し，弾性的な材料特性値の推定や，さらに多孔質材料の解析等に拡張性を持たせることも可能になることなどの理由により弾性解析を実施することとした．3 次元弾性円柱の解析は有限 Fourier-Hankel 変換による方法で変位成分の解析解を誘導し，応力成分を含めた解析プログラムを構築した．本報告では作成した解析プログラムの

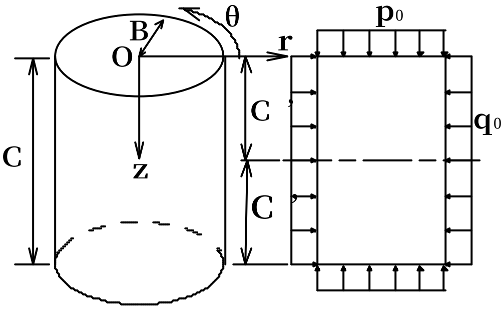


図-1　軸対称有限円柱

妥当性について検証した結果を述べる．

2　解析方法

図-1に示す軸対称有限円柱において r，θ，z 方向の変位をそれぞれ u，v，w とする．円柱座標におけるつり合い方程式にフック則の式を適用すれば式(1)に示す垂直応力 σ_r，σ_θ，σ_z，およびせん断応力　τ_{rz}と式(2)に示すひずみ　ε_r，　ε_θ，　ε_z，およびせん断ひずみ　γ_{zr}で表わされる．なお式中の μ および λ はラーメの弾性係数である．

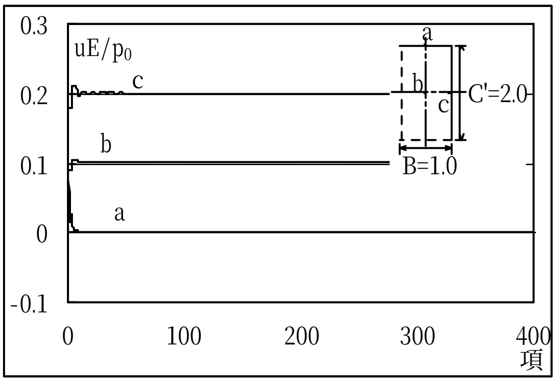
$$\left.\begin{aligned}&\begin{bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\\ \sigma_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(2\mu+\lambda) & \lambda & \lambda\\ \lambda & (2\mu+\lambda) & \lambda\\ \lambda & \lambda & (2\mu+\lambda)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\\ \varepsilon_z\end{bmatrix}\\ &\tau_{rz}=\mu\gamma_{zr}\end{aligned}\right\}\cdots(1)$$

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_r=\frac{\partial u}{\partial r},\quad \varepsilon_\theta=\frac{u}{r}+\frac{\partial v}{r\partial\theta}\\ &\varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z},\quad \gamma_{zr}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

変位成分の一般式は，文献[3)]を参考に，軸対称であることと一軸および三軸載荷試験を想定していることを考慮すれば，結局変位成分 u，w に関する次式を得る．

Elastic Analysis of A Axi-Symmetric Finite Cylinder in consideration of the Loading End Friction

Toshinori MATSUSHIMA，Takamitsu TAKIZAWA，Shyoichi AKIBA　and Yuzou KURIYAGAWA



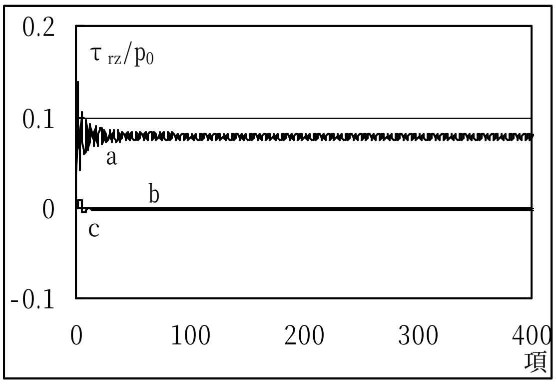


図-2　級数和（ν=0.2,　κ=4,　q_0=0）

$$
\begin{aligned}
w = & -\sum_{n=1} \sin Nz \cdot A_n \left\{ \frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\chi^{(1)}(Nr) \right. \\
& \left. - \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\left(\chi^{(1)}(Nr) - \omega^{(1)}(Nr)\right)\right\} + \left(1-\frac{z}{c'}\right)D_0' \\
& + \sum_{i=1} \frac{J_0(\xi_i r)}{J_0(\xi_i B)^2} D_i' \left\{Q^{(2)}(\xi_i z) + \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}P^{(2)}(\xi_i z)\right\} \\
& + \sum_{i=1}\frac{J_0(\xi_i r)}{J_0(\xi_i B)^2}E_i' \frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}P^{(2)}(\xi_i z)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u = & \frac{r}{2B}A_0 - \sum_{n=1}\cos Nz\cdot A_n\left\{G^{(1)}(Nr)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}F^{(1)}(Nr)\right\} \\
& - \sum_{i=1}\frac{J_1(\xi_i r)}{J_0(\xi_i B)^2}D_i'\left\{\frac{\mu+\lambda}{2\lambda+\lambda}(\phi^{(2)}(\xi_i z)-\psi^{(2)}(\xi_i z)) \right. \\
& \left. - \frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\phi^{(2)}(\xi_i z)\right\} - \sum_{i=0}\frac{J_1(\xi_i r)}{J_0(\xi_i B)^2}E_i'\left\{\frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)} \right. \\
& \left. \times\left(\phi^{(2)}(\xi_i z)-\psi^{(2)}(\xi_i z)\right) + \frac{1}{2\mu+\lambda}\phi^{(2)}(\xi_i z)\right\}
\end{aligned}
$$

…………(3)

上式中，$N=n\pi/B$ (n=1, 2, 3…)，$J_0(x)$および$J_1(x)$は第 1 種 0 次および 1 次の Bessel 関数でξ_i は $J_1(\xi_i B)=0$ におけるパラメーターである．$G^{(1)}(Nr)$, $F^{(1)}(Nr)$, $\chi^{(1)}(Nr)$, $\omega^{(1)}(Nr)$は，Hankel 逆変換公式，$\phi^{(2)}(\xi_i z)$, $\Psi^{(2)}(\xi_i z)$, $Q^{(2)}(\xi_i z)$, $P^{(2)}(\xi_i z)$は Fourier 級数の無限級数和を表わす．また，A_n, D_i', E_i'，は境界未知数で，A_0 は n=0，D_0' は i=0 におけるものである．応力およびひずみ成分は式(3)を式(1)および式(2)に代入することで得られる．境界未知数決定のための境界条件は，試験条件における応力制御あるいは変位制御を考慮して，以下の 2 通りのものを設定した．

表-1 計算精度（ν=0.2, κ=4）

σ_z	$\eta = z/C'$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
	誤差(%)	0.301	1.119	0.667	0.273	0.147
σ_r	q	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4
	誤差(%)	0.051	0.308	0.051	0.034	0.077

(1)応力制御の場合

$$z=0 \text{ で } \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots(4)$$

$$\alpha k^* u = (1-\alpha)\tau_{rz} \quad \cdots\cdots\cdots(5)$$

任意の z で $2\pi\int_0^B r\sigma_z dr = P \quad (P=\pi B^2 p_0)$ ……(6)

r=B で　$\sigma_r = q_0$　………(7)

上式中αは端面の摩擦の程度を表わす係数で 0 ≦α≦ 1 であり 0 であれば端面拘束なし，1 であれば端面の水平方向変位 u が拘束される．本解析ではこのαを拘束係数と称す．なお k^*はαを無次元するために導入したパラメーターである．

(2)変位制御の場合

応力制御の場合における，式(4)が

w=d　………(8)

となるので他の条件は同じである．

D_i'は式(4)あるいは式(8)により 0 であり A_0, A_nおよび E'は，式(7)から(n+i)行(n+i)列のマトリックスを解くことで得られる．また D_0'は，応力制御の場合は式(6)より変位制御の場合は式(8)より得られる．

3　数値計算

3-1　計算精度の検討

図-2は変位・応力成分の級数和について収束性の検討を行った一例である．これより全体的には比較的初期の段階で収束してい

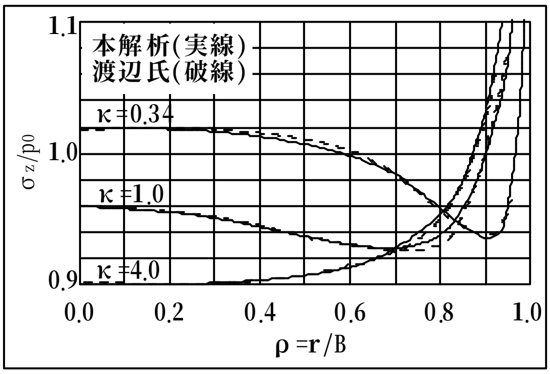


図-3　載荷端面の σ_z の分布($\nu=0.2$, $q_0=0$)

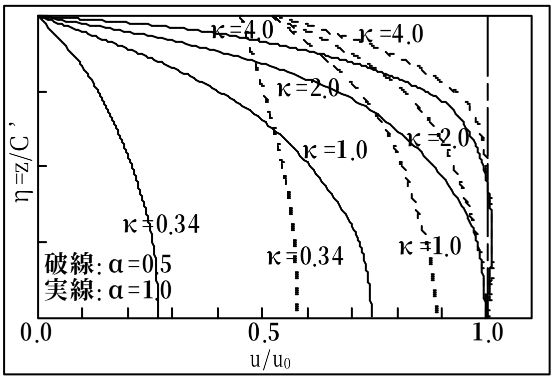


図-4　円柱側面のuの分布($\nu=0.2$, $q_0=0$)

表-2 載荷端面の軸方向変位($\nu=0.2$ p0=1.0)

κ	本解析		渡辺氏	
	α		α	
	1.0	0.5	1.0	0.5
4.00	0.9891	0.9948	0.9891	0.9946
2.00	0.9781	0.9896	0.9781	0.9899
1.00	0.9555	0.9791	0.9555	0.9778
0.34	0.9201	0.9535	0.9197	0.9588

る様子が伺えるが，応力成分に関しては境界面において収束せず，周期的な変動をする．したがって，このような場合には 1 サイクルの平均値を解と見なすこととした．

一方、計算精度は式(4)～(8)の境界条件と比較することによって確認できる．表-1 は式(6)および(7)の左辺を計算し，右辺との誤差（%）を調べた結果である．なお，σ_r については $\rho=r/B$（$=1$）における平均値を用いている．これより，前述した応力成分に関しては境界面において収束性が若干不良であるが，それでも最大で 1.5 %程度の誤差を有する精度であり，本解析プログラムの妥当性が確認できる．なお，σ_z において表中では $\eta=0$ の結果を示してないが，これについては後述する．

本解析プログラムは C++Builder により構築しており，級数計算は i および n ともに 400 項で計算を実施している．この場合，格子点数の多さにはほとんど影響ないが，例えば 441 個の格子点数の計算結果算出に要する時間はパーソナルコンピューター（CPU；Pentium M 1.5GHz）で 12 秒程度である。これは BesselFunction や Modified Bessel　Function の計算において $x>15$ の場合に漸近展開式を用いていることにも起因している．

3-2　既往の研究との比較

図-3は端面での軸方向応力 σ_z の分布である．図中には応力関数法で解析した渡辺の結果も示している．これより，本解析結果と既往の成果はほぼ一致している．ここで，（ρ，η）=(1，0)は解析上の理由から特異点であり，この点における解は得られない．これは渡辺による解析および理由と同じである．

図-4は側面の半径方向変位 u の結果である．結果は端面拘束がない場合のもの（基本解 u_0）で除している．これより，端面が拘束されることで高さの中央部に向かっての側面のふくらみが認められており，その形状は弾性円柱の寸法比 κ(=C/B)や拘束係数αの大きさによって異なっている．この場合，側面のふくらみは高さの中央部で必ずしも最大でなく，円柱の寸法比 $\kappa=4$ では $\eta=0.7$ 付近で最大となる．このことは円柱全体で側面に二つのふくらみを有することを意味しており，このような結果は実験的あるいは解析的な研究成果[2),4)]と同様である．

表-2は端面での軸方向変位 w の結果である．結果は端面拘束がない場合のもの（基本解 w_0）で除している．表中には渡辺による計算結果も示した．なお，渡辺は拘束係数αを $\alpha=0$ で端面における r 方向変位が

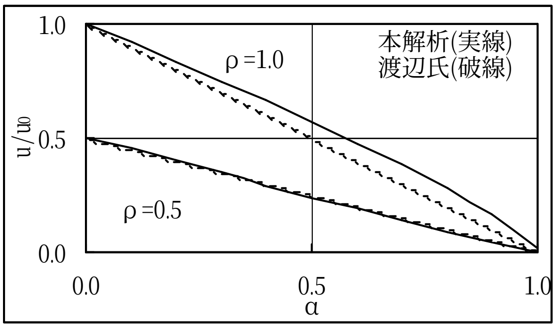


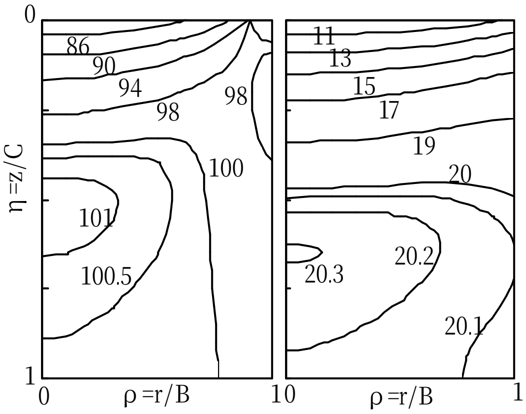
図-5　端面摩擦のuに与える影響（ν=0.2,　κ=4,　q 0=0）

0，α＝1 で自由（＝基本解）としており，本解析条件とは対称であることから，αは本条件の設定に合わせている．これより，結果は端面における r 方向変位が完全に拘束（α＝1）される場合にほぼ一致しているが，多少この部分の変位が許される（α＝0.5）とわずかであるが軸方向変位に差異が現れる．このような現象は端面拘束に対する境界条件の設定の仕方の違いに起因している．すなわち既往の解析結果では端面における任意の位置の u はαに正比例するが，本解析結果では境界条件を式(5)で与えているために端面の任意の位置における u とαが比例関係にない．このことを説明可能な結果として，ρ＝0.5 および 1 において，αに変化させて u を計算したものが図-5である．

渡辺は端面の u の分布を適当に与え，それにαを乗じる境界条件式を設定している．実際の載荷試験における半径方向変位は未知であり，境界の変位関数をどのように与えるかは議論の分かれるところではあるが，一般的にこのようの摩擦の影響を考慮した解析では本解析で用いたような境界条件式を与えているようである．

図-6は次式に示す相当応力σ(σ_1, σ_2, σ_3 は主応力)および周方向ひずみ ε_t についてコンターを描いた一例である．なお基本解の値は，(a)図では 100%(b)図では 20 %で一様分布となる．

$$\sigma=\sqrt{\{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\}/2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$



(a)- σ /p0 (%)　　(b)-E εt/p0 (%)

図-6　応力-ひずみのコンター例
（ν=0.2,　κ=4,　α=0.5,　q 0=0）

これらの結果を既往の成果と比較すると，前述した通り端面摩擦に関する境界条件の違いにより，若干の差異が認められるがほぼ同等の分布形態を示している．特に，周方向ひずみの結果では，側面に膨らみを生じることのわかる分布形状となっている．

4．あとがき

本研究では弾性円柱の軸方向載荷に対する 3 次元解析を有限 Fourier-Hankel 変換による方法を用いて実施し，その解析プログラムを構築した．本解析プログラムによりいくつかの数値計算を実施し、既往の研究結果と比較することで本解析結果の妥当性を検証した．その結果，本解析プログラムは計算精度の良好な汎用性の高いプログラムであることが確認された．今後は本解析結果およびプログラムを応用することで材料特性値の推定手法の提案や，多孔質材料の弾性解析へ拡張することで材料特性の把握が可能となる．

〈参考文献〉

(1)　梶田他：土木学会論文報告集　第 166 号，pp. 27 ～ 38，1969.

(2)　渡辺：土木学会論文集　No.450 ／ I －20，pp. 85 ～ 94，1992.

(3)　Nomachi，SG.：Memories of Muroran Institute of Tech．Vol.3, No.3, pp. 91 ～ 115, 1960.

(4)　長松他：日本機械学会論文集（第 1 部）36 巻，288 号，pp. 1276 ～ 1296，1970.