令和７年度日本大学大学院生産工学研究科　筆記試験　解答例
一般入学試験（第２期）　　　機械工学専攻／数学

１．次の設問に解答せよ.

（１）次の関数の導関数を求めよ.

$$y = \cos^3(x^3 + 1)$$

(解答)

$$y' = 3\cos^2(x^3+1) \times \{-\sin(x^3+1)\} \times 3x^2$$
$$= -9x^2\cos^2(x^3+1)\sin(x^3+1)$$

（２）次の関数の導関数を求めよ.

$$y = 3^{x^2}$$

(解答)

$y = 3^{x^2}$ として両辺対数をとると

$\ln y = x^2 \ \ln 3$

両辺を微分して

$$\frac{y'}{y} = 2x \times \ln 3$$

$$\Leftrightarrow y' = 2x \times \ln 3 \times 3^{x^2}$$

（３）以下の方程式を満たす複素数 z を３つ求めよ. ただし j は虚数単位で $j^2 = -1$ とする.

$$z^3 = -j$$

(解答)

オイラーの公式から　$-j = e^{-\pi/2+2n\pi}$ (n は整数)

$$z = -j^{1/3} = \left(e^{-\pi/2+2n\pi}\right)^{1/3} = e^{-\pi/6+2n\pi/3} = e^{-\pi/6+2m\pi}, e^{\pi/2+2m\pi}, e^{7\pi/6+2m\pi}$$
$$= \frac{\sqrt{3}-j}{2}, \frac{-\sqrt{3}-j}{2}, \quad j$$

ただし、$n = 3m, 3m+1, 3m+2$ (m は整数)とした。

２．3 次元空間の直交座標系において，原点 O と A (2, -1, -3) ，B(-1, 1, 1)，C(3, 1, 4)　の３点がある．以下の設問に答えよ．

（１）三角形 OAB の面積を求めよ．

（解答）

三角形 OAB の面積は　$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|$である。

x, y, z　各々の方向の単位ベクトルを　$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$　とすると。

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_1 & b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (2, 1, 1)$$

$$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{2^2+1^2+1^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

別）$\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{14\times 3 - (-6)^2}$　等でもよい。

（２）三角錐 OABC の体積を求めよ．

（解答）

三角錐 OABC の体積は　$\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|$である。

$\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (2, 1,1)\cdot(3, 1, 4) \;=\; 6+1+4 \;=\; 11$

$$\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right| = \frac{11}{6}$$

（別解）C から平面 OAB に下した垂線の足を H とすると、

H は平面 OAB 上にあるので、　$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

CH は、OA, OB　ともに垂直なので、

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 = 2^2+(-1)^2+(-3)^2 = 14,\ \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 = (-1)^2+1^2+1^2 = 3,\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = -2-1-3 = -6$　に注意して

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = s\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 + t\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} \;=\; 14s \;-\; 6t$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 \;=\; -6\,s \;+\; 3t$

$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(-\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(-3, -1, -4)\cdot(2, -1,-3)+\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 7+14s-6t=0$

$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left(-\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(-3, -1, -4)\cdot(-1, 1,1)+\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = -2-6s+3t=0$

これから　$s=-3/2$,　$t=-7/3$　　よって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = (-3/2)(2,-1,-3)+(-7/3)(-1,1,1) = (-2/3,-5/6,\ 13/6)$,

$\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \;(-2/3,-5/6,\ 13/6) \;-\; (3, 1, 4) \;=\; (-11/3,-11/6,-11/6)$

よって$\left|\overrightarrow{\mathrm{CH}}\right| = (11/6)\times\sqrt{4+1+1} = 11\sqrt{6}/6$

(1)より（底面積）×（高さ）×1/3 = $\frac{\sqrt{6}}{2} \times \frac{11\sqrt{6}}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$

３．次の設問に解答せよ．

（１）次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{1}{3x^2+2}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{y} = 0$$

（解答）

変数分離して

$$y dy = (3x^2+2)\,dx$$

$$\int y dy = \int (3x^2+2)\,dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = x^3 + 2x\ + C \qquad （C は定数）$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \pm\sqrt{2x^3 + 4x\ + C'}$$

（２）次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 8\frac{dy}{dx} + 15y = 0$$

（解答）

特性方程式は　$t^2 + 8t + 15 = 0$　$\Leftrightarrow$ $(t+3)(t+5) = 0$　よって $t = -3, -5$

よって一般解は　$y = A\,e^{-3x} + B\,e^{-5x}$　(A, B は定数)

４．以下の連立の微分方程式を考える．

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \quad x_1 - x_2$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = 8\,x_1 - 5\,x_2$$

ここで　$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$　とすれば，　$\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}$　とかける．ただし，

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$$

である．このとき，以下の設問に解答しなさい．

（１）行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

（解答）

固有値を λ とすると

det(A-λE)=0 ⇔ (1-λ)(-5-λ) +8 = 0 ⇔ λ^2 +4 λ +3 =0 ⇔ (λ+ 1)(λ +3) =0 λ= -1, -3

λ=-1 のとき

$\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$ なので、固有値ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ の定数倍

λ =-3 のとき

$\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$ なので、固有値ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ の定数倍

（２）$\boldsymbol{P}$ とその逆行列 $\boldsymbol{P}^{-1}$ を用いると $\boldsymbol{P}^{-1}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{P}$ が対角行列となるとする．このとき $\boldsymbol{P}^{-1}$ を求めよ．

（解答）

固有ベクトルを並べて

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

det(P)= -2 なので、

$\boldsymbol{P}^{-1} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ 2 & -1/2 \end{pmatrix}$

（もしくは $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ とすると $\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1/2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ）

（３）$\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{P}^{-1}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$ であるから， $\boldsymbol{P}^{-1}\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} = (\boldsymbol{P}^{-1}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{P})\,\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$ である．これを利用して，x_1 の一般解を求めよ．

（解答）

対角化を確認すると

$$\boldsymbol{P}^{-1}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ 2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3/2 \\ -2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{P}^{-1}\ddot{\boldsymbol{x}} = (\,\boldsymbol{P}^{-1}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{P})\,\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$　を書き下すと（$\ddot{}$ は t による**2階微分を表す**）

$$\begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ 2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x_1} \\ \ddot{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ 2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

これから

$$-\ddot{x}_1 + (1/2)\ddot{x_2} = (-3) \times (-x_1 + (1/2)x_2) \quad \Leftrightarrow (-x_1 + \ddot{(}1/2)x_2) = (-3) \times (-x_1 + (1/2)x_2)$$

$$\Leftrightarrow \qquad -x_1 + (1/2)x_2 = A_{m1}\cos(3t + \varphi_{m1})$$

$$2\ddot{x}_1 - (1/2)\ddot{x_2} = (-1) \times (2x_1 - (1/2)x_2) \Leftrightarrow (2x_1 - \ddot{(}1/2)x_2) = (-1) \times (2x_1 - (1/2)x_2)$$

$$\Leftrightarrow \qquad 2x_1 - (1/2)x_2 = A_{m2}\,cos(t + \varphi_{m2})$$

辺々加えると

$$x_1 = A_{m1}\cos(3t + \varphi_{m1}) \quad + \; A_{m2}\,cos(t + \varphi_{m2})$$

問１は必答問題であり，全員解答せよ．

問２，３は選択問題である．いずれか１問を選択し解答せよ（選択した問題番号には○を付すこと）．

問１．　下記の問いに答えよ．

(1)　次の物理量の次元を，例のように質量 M，長さ L，時間 T，温度 θ，電荷 Q を用いて表せ．

例　密度　［ $M \cdot L^{-3}$ ］　　速度　［ $L \cdot T^{-1}$ ］

① 加速度［ $L \cdot T^{-2}$ ］　② 圧力［ $M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$ ］　③ 電流［ $Q \cdot T^{-1}$ ］

④ 運動量［ $M \cdot L \cdot T^{-1}$ ］　⑤ 周波数［ T^{-1} ］　⑥ 位置エネルギー［ $M \cdot L^{2} \cdot T^{-2}$ ］

⑦ 比容積［ $M^{-1} \cdot L^{3}$ ］　⑧ ばね定数［ $M \cdot T^{-2}$ ］　⑨ 万有引力定数［ $M^{-1} \cdot L^{3} \cdot T^{-2}$ ］

⑩ 比熱［ $L^{2} \cdot T^{-2} \cdot \theta^{-1}$ ］

(2)　今，ポテンシャルエネルギー U が下式のような位置の関数で与えられている．このポテンシャルエネルギーに起因する力が保存力である時，x, y, z の各方向の保存力(F_x, F_y, F_z)はそれぞれどのような関数となるか示せ．ここで，ポテンシャルエネルギーと保存力は無次元とする．

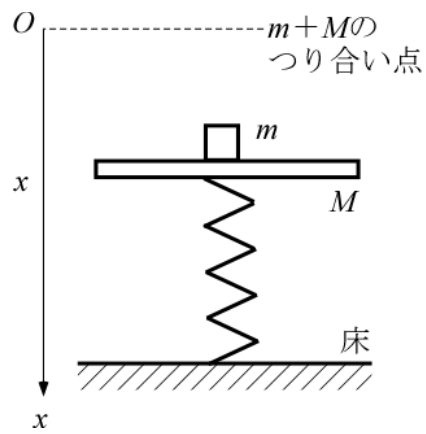
$$U = -2x^2 + 3xy + y^2 + 5x - 4y + 2$$

$F_x =$ $4x - 3y - 5$　，$F_y =$ $-3x - 2y + 4$　，$F_z =$ 0

さらに，$(x, y, z) = (0, 0, 0)$および$(1, 1, 1)$の２点における保存力の各成分をそれぞれ数値で求めよ．

点$(0, 0, 0)$の$(F_x, F_y, F_z) = ($ -5 ， 4 ， 0 $)$　　点$(1, 1, 1)$の$(F_x, F_y, F_z) = ($ -4 ， -1 ， 0 $)$

問２．　右図のように，下端を床に固定して鉛直に立てたばね（ばね定数 k）の上端に質量 M の薄い板を固定し，その上に質量 m の小物体を置く．板と小物体をあわせて，つり合っている位置を原点 O とし，下向きに x 軸をとる．すなわち，ばねの自然長の上端位置は負となる．重力加速度を g として，ばねの質量や空気抵抗は無視できるものとする．以下の問いに答えよ．



(1)　小物体が板から離れずに運動するものとして，両者の共通の座標を x とする．小物体が板から受ける抗力を N としたとき，板と小物体の運動方程式をそれぞれ求めよ．

(2)　初めに，$x = a_0$ の位置で，小物体を乗せた板を静かに放した．小物体は板から離れないものとして，x の時間変化を求めよ．

(3)　抗力 N を x の関数として求めよ．

(1) つり合い位置でのばねの縮みを x_0（ばねの自然長の上端位置は $x = -x_0$）とすると

$0 = (m + M)g - kx_0$ となる．　$\therefore Mg = -mg + kx_0$

板の運動方程式：$M\dfrac{d^2x}{dt^2} = Mg + N - k(x + x_0) = -mg + kx_0 + N - kx - kx_0 = -mg + N - kx$　…①

小物体の運動方程式：$m\dfrac{d^2x}{dt^2} = mg - N$　…②

(2) 全体の運動方程式は，①，②式より，$(M + m)\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx$　…③

固有円振動数を $\omega_n = \sqrt{\dfrac{k}{M + m}}$ とおくと，③式の一般解は $x = a\cos\omega_n t + b\sin\omega_n t$ となり，

速度は $\dfrac{dx}{dt} = -a\omega_n \sin\omega_n t + b\omega_n \cos\omega_n t$ となる．

初期条件（$t = 0$，$x = a_0$，$\dfrac{dx}{dt} = 0$）より，$a = a_0$，$b\omega_n = 0$ となる．　$\therefore x = a_0 \cos\sqrt{\dfrac{k}{M + m}}t$

(3) ③式より，$\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{k}{M + m}x$ となるので，②式より，$N = mg - m\dfrac{d^2x}{dt^2} = mg - \dfrac{mk}{M + m}x$

受験科目名
物理学

問３．　移動現象における保存則の式を導出する．下線部分に該当する式または文字を書け．

(1)　保存則の概念は自然科学できわめて重要である．保存則は，以下の単純な収支のバランスとして記述できる．

[保存量の増加] ＝ [流入物理量] ＋ [保存量の生成]　　(A)

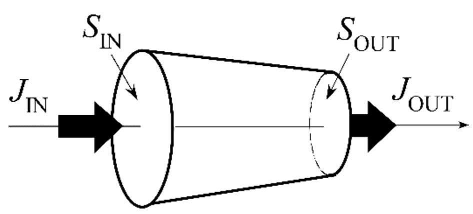
ただし，(A)式において，[増加]，[流入]，および[生成]は正の量とは限らない．これらが負の場合は，[負の増加] → [減少]，[負の流入] → [流出]，および[負の生成] → [消滅]と解釈すれば良い．

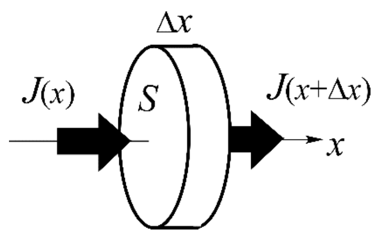
「保存量」である３つ物理量を以下に書け．

質　量　，　運動量　，　エネルギー

(2)　(A)式に示した保存則を単位時間あたりの変化として書き改めると，下記となる．

[単位時間あたりの保存量の増加] ＝ [単位時間あたりの流入物理量] ＋ [単位時間あたりの保存量の生成]　(B)





今，右図のように移動現象の経路を x で表す．この方向の流れに対して Δx 離れた垂直な２つの断面を考える．右下図のように面間隔 Δx を狭めると両方の面積は同じ S とみなせる．単位体積あたりの保存量を Q，単位時間単位面積あたりの流入物理量を J，単位時間単位体積あたりの生成を H とする．

Δt の間の保存量の増加分は $(\partial Q/\partial t)S\Delta t\Delta x$ である．よって，(A)式を書き出すと下式となる．

$$\frac{\partial Q}{\partial t}S\Delta t\Delta x = -\left(J(x+\Delta x)-J(x)\right)S\Delta t + HS\Delta t\Delta x \qquad \text{(C)}$$

$J(x+\Delta x)$ をテイラー展開すると（Δx の２次以上の項は無視する），

$$J(x+\Delta x) = J(x)+\frac{\partial J(x)}{\partial x}\Delta x \qquad \text{(D)}$$

よって，(C)式は下式となる．

$$\frac{\partial Q}{\partial t}S\Delta t\Delta x = -\frac{\partial J(x)}{\partial x}\Delta x S\Delta t + HS\Delta t\Delta x \qquad \text{(E)}$$

(E)式の両辺を $S\Delta t\Delta x$ で割ると，下式を得る．

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial J(x)}{\partial x}=H \qquad \text{(F)}$$

また，$Q=\rho$，$J=\rho u$，$H=0$ を代入すると下式となる．

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}=0 \qquad \text{(G)}$$

これは，質　量保存則（一次元）である．

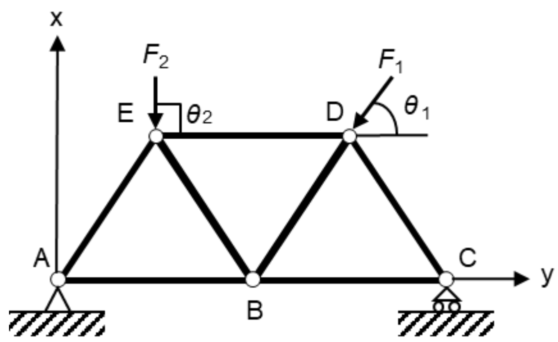
受験科目名
物理学

1．図に示すように，節点Dにθ_1=65 °でF_1=10 kN，節点Eにθ_2=90 °でF_2=5 kNの力が加わっているトラスについて，次の設問に答えなさい．なお，各部材の長さはすべて 2 mである．

(1) 点Aの反力を求めなさい．

(2) 点Cの反力を求めなさい．

(3) 引張力を正として部材B-Eの内力を求めなさい．



（1） y 軸方向の力のつり合いから $\mathrm{R}_{Ay} - 10\cos 65° = 0$ となるため，$\mathrm{R}_{Ay} = 4.226 \simeq 4.23$ [kN] となる。

点 A におけるモーメントのつり合い式は $-4\mathrm{R}_{Cx} + 3\times 10\sin 65° - \sqrt{3}\times 10\cos 65° + 1\times 5 = 0$ となるため，

$\mathrm{R}_{Cx} = 6.217 \simeq 6.22$ [kN]

次に，x 軸方向の力のつり合いから $\mathrm{R}_{Cx} + \mathrm{R}_{Ax} - 5 - 10\sin 65° = 0$ となるため，$\mathrm{R}_{Ax} = 7.846 \simeq 7.85$ [kN] となる。これらより，x 軸方向の単位ベクトルを **i**，y 軸方向の単位ベクトルを **j** とすると，

$\mathrm{R}_A = \mathrm{R}_{Ax} i + \mathrm{R}_{Ay} j = 7.85i + 4.23j$ [kN] となる。

（2） $\mathrm{R}_{Cx} = 6.217 \cong 6.22$ となり，点 C は移動端であるから，$\mathrm{R}_C = \mathrm{R}_{Cx} i + \mathrm{R}_{Cy} j = 6.22i + 0j$ [kN] となる。

（3） 節点 A における x 軸方向の力のつり合いから $\mathrm{R}_{Ax} + f_{AE}\sin 60° = 0$ となるため，$\mathrm{f}_{\mathrm{AE}} = -\dfrac{R_{Ax}}{\sin 60°}$ となる。

これを踏まえると，節点 E における x 軸方向の力のつり合いは $-f_{AE}\sin 60° - f_{EB}\sin 60° - F_2 = 0$ となるので $\mathrm{f}_{\mathrm{EB}} = 3.286 \simeq 3.29$ [kN] 引張力となる。

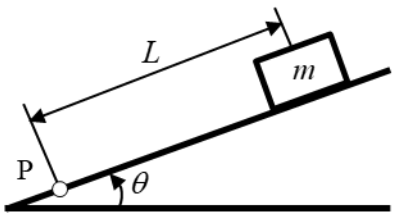
２. 図に示すように，質量 m の物体を傾斜角 θ=20 °の斜面に置くと物体は滑り始めた．次の設問に答えなさい．なお，斜面の動摩擦係数 μ=0.2，質量 m＝7 kg, 初期位置から P 点までの距離 L=2 m，重力加速度 g=9.8 m/s^2 として，空気抵抗は無視できるものとする．

(1) 物体の重力が P 点を通過するまでに行った仕事を求めなさい．

(2) 物体斜面間の摩擦力が P 点を通過するまでに行った仕事を求めなさい．

(3) P 点を基準位置として物体が運動を始める前に持っていた初期力学的エネルギーを求めなさい．

(4) 物体が距離 L 滑り降りて点 P を通過する時の速さを求めなさい．



（１） 物体の重力が行った仕事は，重力の移動方向成分とその方向の移動距離の積で表されるため，

$W_g = mgL\sin\theta = 46.92 \simeq 46.9$ [J] となる。

（２） 物体斜面間の摩擦力が行った仕事は，摩擦力の移動方向成分とその方向の移動距離の積で表されるため，

$W_f = -L\mu mg\cos\theta = -25.78 \simeq -25.8$ [J] となる。

（３） 物体が運動を始める前に持っていた初期力学的エネルギーは，重力が P 点通過までに行った仕事に等しいから $U = W_g = 46.92 \simeq 46.9$ [J] となる。

（４） 点 P を通過する時の速さを v_p とすると，力学的エネルギー保存則から $U + W_f = \frac{1}{2}v_p^2$ が成り立つため，

$v_p = 2.455 \simeq 2.46$ [m/s] となる。

受験科目名
機械力学

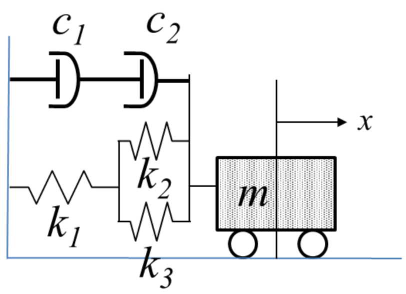
3. 図に示す質量･ダンパ･ばね系について，次の設問に答えなさい．なお，各係数は次の通りとする．

質量 m＝3 kg，ばね定数 k_1=70 N/m，k_2=50 N/m，k_3=75 N/m，粘性抵抗係数 c_1=10 Ns/m，c_2=5 Ns/m とする．

(1) 等価ばね定数 K_T を求めなさい．

(2) 等価粘性抵抗係数 C_T を求めなさい．

(3) 図に示す質量･ダンパ･ばね系の運動方程式を立式しなさい．



（1） 並列結合した k_2 と k_3 の等価ばね定数 K_1 は $K = k_2 + k_3 = 125$ となり，この K と k_1 を直列結合した等価ばね定数 K_T は $K_T = \dfrac{k_1 K}{k_1 + K} = 44.87 \simeq 44.9$ [N/m] となる。

（2） 直列結合した c_1 と c_2 の等価粘性抵抗係数 C_T は $C_T = \dfrac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} = 3.333 \simeq 3.33$ [Ns/m] となる。

（3） 質量に働くトータル力は $F_t = -K_T x - C_T \dot{x}$ となり，これが慣性力 $m\ddot{x}$ とつり合うので，運動方程式は

$m\ddot{x} + C_T \dot{x} + K_T x = 0$ となり，各係数を代入すると $3\ddot{x} + 3.33\dot{x} + 44.9x = 0$ となる。

受験科目名
機械力学

（1）材料力学で用いられる次の用語の意味を説明せよ．

① 断面二次モーメント

＜解答例＞

断面二次モーメントとは，曲げモーメントに対するはり部材の変形のしにくさを表した量であり，「長さの 4 乗」という次元をもつ．物体の断面を変えると，断面二次モーメントの値も変化するので，構造物の耐久性を向上させる上で，設計上の指標として用いられる．

② 平面ひずみ状態

＜解答例＞

ひずみがある 1 つの平面（例えば xy 平面）に平行に生じるのみで，この面に垂直な z 方向の変形が拘束されていて z 方向のひずみ成分が 0 の状態を平面ひずみ状態という．平面ひずみ状態は，1 つの軸の厚さが大きく，すべての場所で断面形状が同じ物体が，その軸に沿って一様な荷重を受ける場合などで近似的に成立する．

③ 主応力

＜解答例＞

物体内の微小要素での応力状態を表現する時に，適切な直交座標系を選ぶと応力のせん断成分が 0 になり，垂直応力のみで表示できることが知られている．その時の垂直応力を主応力，主応力の方向を応力の主軸，主応力の作用する面を主応力面という．

④ 応力集中

＜解答例＞

部材の直径が途中で変わる場合や，切欠きなどの急な形状変化がある場合などは，局部的に応力が大きくなる．このように，物体の形状変化部で局所的に応力が増大する現象を応力集中と呼ぶ．

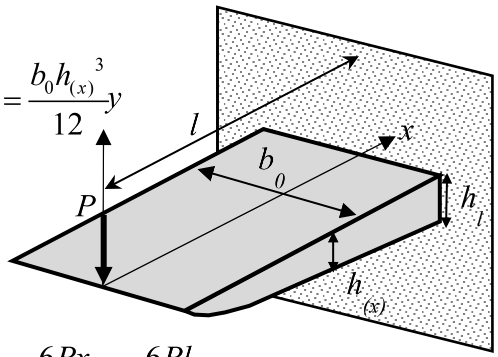
⑤ 座屈

＜解答例＞

座屈は，構造物に加える荷重を次第に増加すると，ある荷重で急に変形の模様が変化し，大きなたわみを生ずることをいう．構造に座屈現象を引き起こす荷重をその構造の座屈荷重と呼び，座屈荷重はその構造の剛性および形状に依存し，材料の強度以下で起こることもある．

（2）図に示すような幅 $\boldsymbol{b_0}$ が一定で，高さ $\boldsymbol{h}$ が変化する長さ $\boldsymbol{l}$ の片持ちはりの先端に集中荷重 $\boldsymbol{P}$ が作用する場合を考える．このはりが平等強さのはりになるように高さ $\boldsymbol{h(x)}$ を求めよ．ただし，ヤング率は $\boldsymbol{E}$ で，$\boldsymbol{x=l}$ の固定端では $\boldsymbol{h=h_l}$ とする．

＜解答例＞



点 A から x の位置での曲げモーメントは， $M = Px$，断面二次モーメント I は $I = \dfrac{b_0 h_{(x)}{}^3}{12} y$

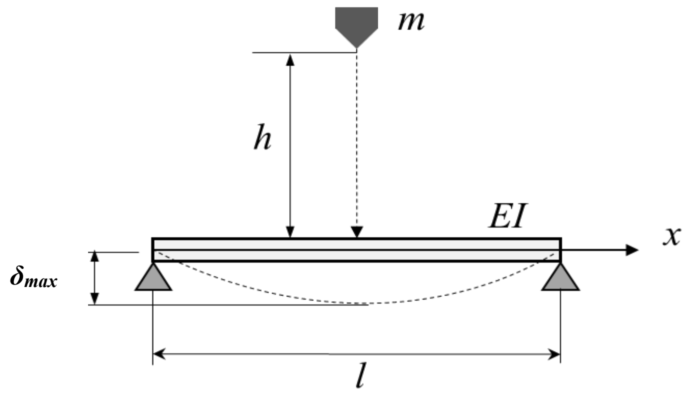
点 A から x の離れた位置での曲げ応力の最大値 σ は，

$$\sigma = \frac{M}{I} y = \frac{Px}{\frac{b_0 h_{(x)}{}^3}{12}} \times \frac{h_{(x)}}{2} = \frac{6Px}{b_0 h_{(x)}{}^2}$$

となる． σ が σ_{max} と等しくなるような幅 $h(x)$ の関数形を求めると $\sigma = \sigma_{\max}$ より， $\dfrac{6Px}{b_0 h_{(x)}{}^2} = \dfrac{6Pl}{b_0 h_l{}^2}$ となるため

$h_{(x)} = h_l \sqrt{\dfrac{x}{l}}$ 　　となる．

（3）図に示すように，長さ $\boldsymbol{l}$，断面 2 次モーメント $\boldsymbol{I}$，縦弾性係数 $\boldsymbol{E}$ の両端支持はりの中央に，高さ $\boldsymbol{h}$ から質量 $\boldsymbol{m}$ の物体を自由落下させた．この時，はりに作用する衝撃荷重 $\boldsymbol{P}$ とはりの最大たわみ $\boldsymbol{\delta_{max}}$ を求めよ．
ただし，重力加速度は $\boldsymbol{g}$ とする．



＜解答例＞

この棒の片持はりに，質量 $\boldsymbol{m}$ のおもりが衝突したことにより，丸棒が $\boldsymbol{\delta}$ たわんだとすると，おもりのなす仕事 $\boldsymbol{W}$ は，

$$W = mg\left(h+\delta\right)$$

である．ここで，片持ちはりの先端部のたわみ $\boldsymbol{\delta}$ は静的荷重の場合と同様に $\delta = \dfrac{Pl^3}{48EI}$ となる．
したがって，おもりのなす仕事 $\boldsymbol{W}$ は，

$$W = mg\left(h+\delta\right) = mg\left(h+\frac{Pl^3}{48EI}\right)$$

である．

一方，この丸棒に蓄えられるひずみエネルギー $\boldsymbol{U}$ は， $U = 2\int_0^{\frac{l}{2}}\dfrac{M^2}{2EI}dx = \dfrac{1}{EI}\int_0^{\frac{l}{2}}\left(\dfrac{Px}{2}\right)^2 dx = \dfrac{P^2}{12EI}\left[x^3\right]_0^{\frac{l}{2}} = \dfrac{P^2l^3}{96EI}$

である．丸棒に蓄えられるひずみエネルギー $\boldsymbol{U}$ は，おもりが高さ（$\boldsymbol{h+\delta}$）から落下したことによる位置エネルギー $\boldsymbol{W}$ から与えられたと考えられるから，上式を等置して，

$$W = U \quad \Rightarrow \quad mg\left(h+\frac{Pl^3}{48EI}\right) = \frac{P^2 l}{96EI}$$

したがって，衝撃荷重 $\boldsymbol{P}$ に関する 2 次方程式を解けば，衝撃荷重 $\boldsymbol{P}$ は次式となる．

$$P^2l^3 - 2mgPl^3 - 96EImgh = 0$$

$$\therefore\ P = \frac{2mgl^3 + \sqrt{4m^2g^2l^6 + 384EImghl^3}}{2l^3} = mg + \sqrt{m^2g^2 + \frac{96EImgh}{l^3}} = mg + mg\sqrt{1+\frac{96EIh}{mgl^3}} = mg\left(1+\sqrt{1+\frac{96EIh}{mgl^3}}\right)$$

この $\boldsymbol{P}$ を先端に荷重を受ける片持ちはりの先端のたわみの式に代入すると

$$\delta_{\max} = \frac{Pl^3}{48EI} = \frac{mg\left(1+\sqrt{1+\dfrac{96EIh}{mgl^3}}\right)}{48EI}l^3 = \frac{mgl^3}{48EI}\left(1+\sqrt{1+2h\left(\frac{48EI}{mgl^3}\right)}\right)$$

ここで，$\boldsymbol{\delta_{st}}$ は先端に静的荷重 mg を受ける片持ちはりの先端のたわみ $\delta_{st} = \dfrac{P_{st}l^3}{48EI} = \dfrac{mgl^3}{48EI}$ である．

問題1　高温熱源温度T_1，低温熱源温度T_2の二つの熱源間で仕事を発生する可逆サイクルを考える．1サイクルでこの可逆サイクルが外部にする仕事をWとして，次の問に答えよ．

（1）熱効率ηを求めよ．

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

（2）高温熱源からサイクルが受け取る熱量Q_1をT_1，T_2，Wを用いて表せ

$$\eta = \frac{W}{Q_1} \qquad Q_1 = \frac{W}{\eta} = \frac{W}{1-\frac{T_2}{T_1}} = \frac{WT_1}{T_1-T_2}$$

$$Q_1 = \frac{WT_1}{T_1-T_2}$$

（3）低温熱源に放出する熱量Q_2をT_1，T_2，Wを用いて表せ．

$$W = Q_1 - Q_2$$

$$Q_2 = Q_1 - W = \frac{WT_1}{T_1-T_2} - W = \frac{WT_2}{T_1-T_2}$$

$$Q_2 = \frac{WT_2}{T_1-T_2}$$

（4）このサイクルが高温熱源から受け取ったエントロピS_1をW，T_1を用いて表せ．

$$S_1 = \frac{Q_1}{T_1} = \frac{\frac{WT_1}{T_1-T_2}}{T_1} = \frac{W}{T_1-T_2}$$

$$S_1 = \frac{W}{T_1-T_2}$$

（5）このサイクルが外部に放出したエントロピS_2とするとき，WをS_1，S_2，T_1，T_2の文字を用いて表せ．

$$S_2 = \frac{Q_2}{T_2}, \quad W = Q_1 - Q_2 = S_1T_1 - S_2T_2$$

$$W = S_1T_1 - S_2T_2$$

（6）このサイクルが不可逆的に放熱した場合の外部に放出したエントロピS_2'とW，T_1，T_2の間に成り立つ不等式を記述せよ．

$$S_2' > S_1 = \frac{Q_1}{T_1} = \frac{\frac{WT_1}{T_1-T_2}}{T_1} = \frac{W}{T_1-T_2}$$

$$S_2' > \frac{W}{T_1-T_2}$$

受験科目名
熱力学

問題2　水素と酸素を 2:1 の体積割合で混合した．この混合気の分子量とガス定数を求めよ．ただし，水素と酸素は理想気体として扱い，それぞれの分子量は 2.0 kg/kmol および 32.0 kg/kmol，一般ガス定数 8.314kJ/kmolK とし，有効数字 3 桁で答えよ．

平均分子量　$M_m = \frac{(2\times2)+1\times32}{2+1} = 12.0$ kg/kmol

混合気ガス定数　$R_m = \frac{8.314}{0.012kg/mol} = 0.693$ kJ/kgK

混合気の分子量：

混合気のガス定数：

問題3　ある流体機械に圧力p_1，比容積v_1，比内部エネルギu_1の空気が流入し，仕事を発生した後，圧力p_2，比容積v_2，内部エネルギu_2となって流出したとする．この間に流体機械が発生した比工業仕事w_tを求めよ．ただし，外系との熱の授受および流体の速度変化は無視する．

ここで、外系との熱の授受および流体の速度変化は無視するので、

$$u_1 + p_1v_1 = u_2 + p_2v_2 + w_t$$

が成り立つ．従って，　$w_t = u_1 - u_2 + p_1v_1 - p_2v_2$

比工業仕事　$w_t = u_1 - u_2 + p_1v_1 - p_2v_2$

問題 4　以下の語句を説明せよ。図、式を用いてもよい．

a．熱力学第二法則

熱は高温から低温に自発的に移動すること、孤立系のエントロピは常に増大する。
単一の熱源からの熱をすべて仕事に変換することできないなど。

b．ランキンサイクル

蒸気を利用した熱機関のサイクルであり、発電所やボイラーシステムで広く使われる．
蒸気サイクル、クラウジウスサイクルとも呼ばれる

受験科目名
熱力学

問１～問５共通　　題意に応じ，必要な記号等はその旨を記し追加して使用すること．
解答用紙が不足する場合には，解答用紙裏面も使用してよい．

問１　次の語句を解説しなさい．なお，図式等を用いる場合についても解説文を付すこと．

（１）揚力と揚力係数

揚力は流れ方向に垂直の向きに作用する流体力であり，揚力係数C_Lは揚力Lを周囲流体の密度ρと代表速度Uからなる動圧と代表面積Aの積で割ったものである．

$$C_L = \frac{L}{\frac{\rho U^2}{2} \cdot A}$$

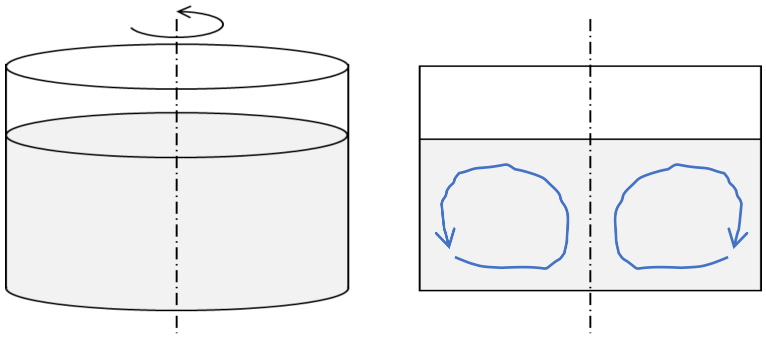
（２）カルマン渦列とストローハル数

柱状物体が流れに直角におかれたとき，物体後流に１周期ごとに反対符号の渦が放出されて互い違いに並んだ渦の列をカルマン渦列と呼ぶ．また，ストローハル数は，物体から渦が放出される周波数fを，物体の代表長さLおよび主流の速度Uで無次元化したものである．

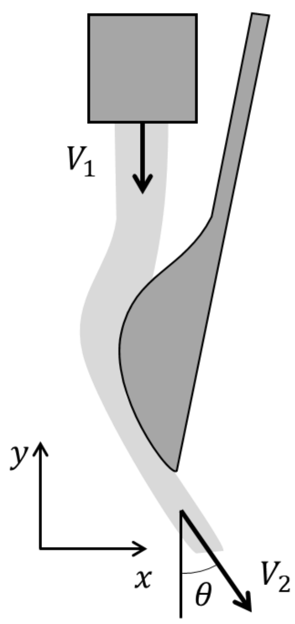
$$St = \frac{f}{U/L}$$

問２　円筒形状の容器に水を入れ，容器を一定時間回転させた後に静止した．静止後に断面に生じる二次流れの様子を右の図中に図示し，そのような流れになる理由について説明しなさい．

容器が静止した後も慣性によって水は回転運動を続ける．流速が遅い容器下面で，遠心力によって高くなった外側の圧力によって，中心に向かう流れが誘起されて二次流れが生じる．



問３　図のように，蛇口から水を流量$Q[\mathrm{m^3/s}]$で出しているところに，スプーンを近づけて水の流れを角度θ[rad]曲げるとき，スプーンに作用するx方向の流体力F_xはどのような式で表されるか？　蛇口での水の流速を$V_1[m/s]$，スプーンから水が離れるところでの流速をV_2[m/s]とする．また，水の密度を$\rho_w[\mathrm{kg/m^3}]$，重力加速度を$g[\mathrm{m/s^2}]$，大気圧をp_a[Pa]とする．



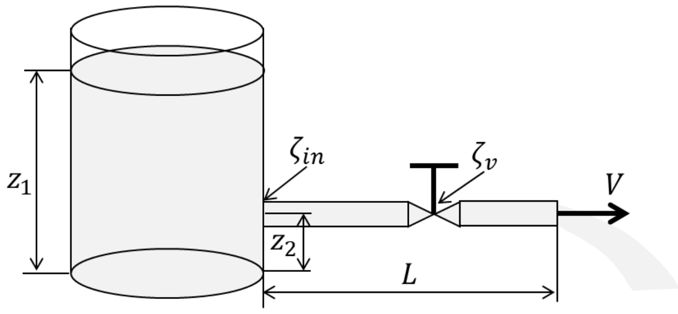
x方向の運動量の法則より，

$$F_x = -\rho_w Q V_2 \sin\theta$$

となる．

受験科目名
流体力学

問４　下図のように，タンクの側壁に接続した直径$d[m]$，長さ$L[m]$の管路を通って，ノズルから密度$\rho[\mathrm{kg/m^3}]$の液体が噴出している．管路にはバルブが取り付けられており，その損失係数をζ_Vとする．タンク底面から液面までの高さを$z_1[\mathrm{m}]$，タンク底面から管路中心までの高さを$z_2[\mathrm{m}]$とするとき，液体の噴出速度$V[\mathrm{m/s}]$はいくらになるか？　ただし，タンクの液面の変化は無視できるとし，管路の入口損失係数をζ_{in}，管摩擦係数をλ，重力加速度を$g[m/s^2]$，大気圧を$p_a[\mathrm{Pa}]$とする．



修正ベルヌーイの式より

$$\frac{V_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\rho g}+z_1=\frac{V_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\rho g}+z_2+h_t$$

$V_1 \simeq 0, V_2 = V, p_1 = p_2 = p_a$より，

$$z_1=\frac{V^2}{2g}+z_2+h_t$$

一方，総損失ヘッドは

$$h_t=\left(\zeta_{in}+\lambda\frac{L}{d}+\zeta_v\right)\frac{V^2}{2g}$$

と表されるので，

$$V=\sqrt{\frac{2g(z_1-z_2)}{\left(1+\zeta_{in}+\lambda\frac{L}{d}+\zeta_v\right)}}$$

となる．

問５　質量$m_f[\mathrm{kg}]$，体積$V_{f0}[\mathrm{m^3}]$の浮沈子を水が入ったペットボトルの中にいれて蓋をする．ペットボトルを圧力$\Delta P[\mathrm{Pa}]$で圧縮すると，浮沈子の体積弾性率$K_f[\mathrm{Pa}]$と水の体積弾性率$K_w[\mathrm{Pa}]$の違い（$K_f \ll K_w$）から，浮沈子の密度$\rho_f[\mathrm{kg/m^3}]$が水の密度$\rho_{w0}[\mathrm{kg/m^3}]$よりも大きくなって，浮沈子が水の中に沈む．浮沈子を沈めるのに必要な圧力$\Delta P[\mathrm{Pa}]$はどのような式で表されるか？　ただし，水の密度は圧力によって変化しないものとし，重力加速度を$g[\mathrm{m/s^2}]$とする．

浮沈子の体積変化をΔV_fとすると，体積弾性率の定義より，

$$\Delta V_f=-V_{f0}\frac{\Delta p}{K_f}$$

を得る．浮沈子の密度$\rho_f[\mathrm{kg/m^3}]$は

$$\rho_f=\frac{m_f}{V_{f0}+\Delta V_f}=\frac{m_f}{V_{f0}\left(1-\frac{\Delta p}{K_f}\right)}$$

と表される．よって，水の密度よりも大きくなるために必要な圧力は

$$\Delta p>\left(1-\frac{m_f}{\rho_{w0}V_{f0}}\right)K_f$$

となる．

受験科目名
流体力学

1. 普通鋼と合金鋼の違いを述べ，それらの種類について説明し，さらに特徴(特性)を比較しなさい。

・鉄に炭素が含まれている合金を鋼といい，炭素量の規定がなく引張強さの下限値だけが規定されている一般構造用圧延鋼材（SS 材）と炭素量や 5 大元素のケイ素，硫黄，リン，マンガンのそれぞれの量が規定されている機械構造用炭素鋼鋼材（SC 材）が普通鋼として存在している。一方で，SC 材に対して特殊な用途や高強度化のために様々な添加元素が含まれる合金鋼が存在している。
　例えば，
・Cr を 13%以上含むステンレス鋼（SUS 材）やさらに Ni を 8%以上含むステンレス鋼
・ステンレス鋼に対して Mo，V，などの高融点金属を含んだ耐熱鋼（SUH 材）
・高強度化をはかった Mn 鋼（SMn 材），Cr 鋼（SCr 材）
　例えば，
・それぞれの鋼の一般的な力学的性質，すなわち引張り強さや伸びの値を具体的に示しているかどうか
・さらにオーステナイト領域から様々な冷却速度によって生じる組織（マルテンサイト）の説明，その後の焼き戻しといった熱処理に関する内容を説明しているかどうか

2. JIS で規定されている SS400，S45C，FC300 の名称を記述し，それらの特性や特徴を述べなさい。

・SS400 ⇒ 一般構造用圧延鋼材，引張り強さが 400MPa。熱処理をせずに使用する。機械構造用炭素鋼鋼材より安価。

・S45C ⇒ 機械構造用炭素鋼鋼材，炭素含有量は中心値で 0.45%。熱処理を行って機械的性質を変えることが可能。

・FC300 ⇒ ネズミ鋳鉄，引張り強さが 300MPa。伸びがほとんどない。引張り力を受ける部材には使用しない。

3. 展伸材に分類されているアルミニウム合金の種類と特性を説明し，鉄鋼材料との違いを説明しなさい。

・一般的にアルミニウム合金は，鋳物用合金と展伸材用合金に分類され，展伸材用アルミニウム合金は熱処理型合金と非熱処理型合金に分類できる。
非熱処理型：A1XXX（純アルミニウム），A3XXX（Al-Mn 系），A4XXX（Al-Si 系），
　　　　　　A5xxx（Al-Mg 系）
　　　　　　これらの材料は加工硬化によって強度を向上させている
　　　　　　各使用例の説明など
熱処理型：A2XXX（Al-Cu 系），A6XXX（Al-Mg-Si 系），A7xxx（Al-Zn-Mg 系）
　　　　　熱処理（溶体化処理，水焼き入れ，焼き戻し）をして時効によって強度を高めている
　　　　　各使用例の説明など
・ヤング率、密度、熱伝導率、比強度、降伏応力などを具体的な数値を用いて説明

1．代表的な鋳造組織であるデンドライトを生じるメカニズムについて，亜共晶 Al-Si２元系合金を例に，図１に示す平衡状態図を用いて説明せよ．

デンドライトは鋳型内での溶湯の凝固が進行する過程で組成的過冷を生じることによって形成される組織である．それゆえ，純金属溶湯の鋳造ではデンドライト組織は形成されない．(10)

亜共晶 Al-Si 合金の場合，溶湯が鋳型に接触することで急冷されてチル組織が形成された後，結晶の優先成長方位が最大温度勾配方向に近い結晶が選択的に成長して柱状組織形成に移行する．凝固は液相線下まで冷却されることで開始するため，この柱状組織は初晶 Al(Si)固溶体のみで構成される（図１の①）．初晶 Al(Si)固溶体の Si 組成は溶湯の Si 組成よりも低いため，凝固が進行する前縁近傍の液相では Si が濃縮する（図１の②）．溶湯中の Si 濃度上昇は液相を安定化し，凝固速度を低下させる．この凝固速度の低下は液相中の Si 組成の揺らぎによる個々の柱状結晶の成長速度差を顕在化させ，Si 濃縮液層から突出した結晶が優先的に成長するようになる．同時に，成長する柱状晶の間隙に向けて枝が伸びるように成長し，樹枝状晶（デンドライト）が形成される．(15)

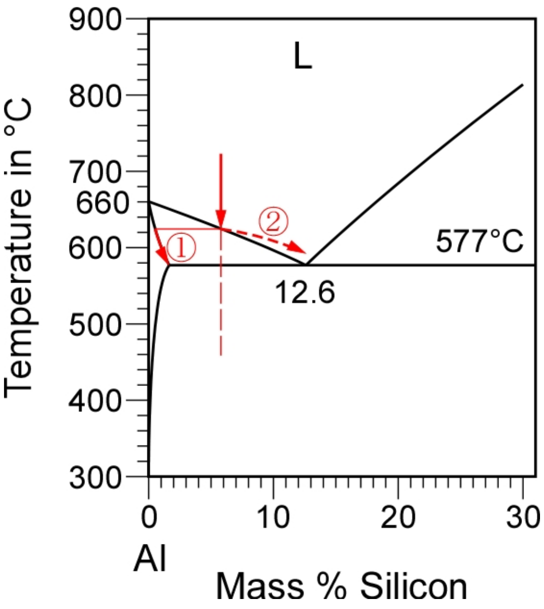


図１　Al-Si ２元系平衡状態図．

2．図２に示すロール間ギャップ t_g，ロール直径 D_R の同径双ロール圧延において，板材とロールの動摩擦係数を μ とおく．このとき，自発的に板材をロール間にかみ込めなくなる限界板厚さ t_{max} を導出せよ．(25)

右図のように，被加工材がロールから受ける力 F の圧延方向の分力が被加工材とロールの摩擦力 μF の圧延方向の分力より小さければ板をロールにかみ込むことができるので，

$$\mu F\cos(\theta_{max}) \geqq F\sin(\theta_{max})$$

が成立すればよい．すなわち，圧延限界板厚 t_{max} のとき，

$$\mu F\cos(\theta_{max}) = F\sin(\theta_{max})$$

$$\mu = \tan(\theta_{max})$$

である．また，右図から幾何学的に

$$(t_{max} - t_g)/2 = D_R\{1 - \cos(\theta_{max})\}/2$$

が成立することから，圧延限界板厚 t_{max} は

$$t_{max} = D_R\{1 - \cos(\theta_{max})\} + t_g$$

$$= D_R\{1 - \cos(\arctan(\mu))\} + t_g$$

と求まる．

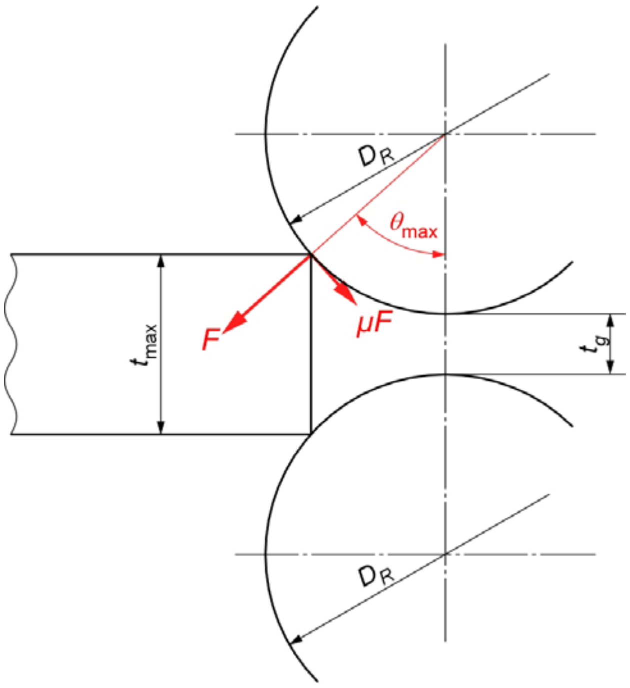
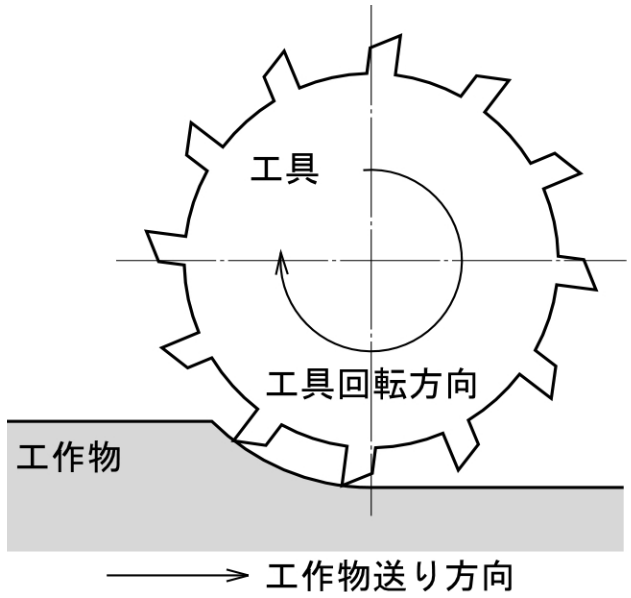


図２　同径双ロール圧延の模式図．

3．フライス削りでは，工具の回転方向と被削材の送り方向によって上向き削りと下向き削りの２種類がある．これらのうち，上向き削りのプロセスと特徴を説明せよ．

プロセスの説明　12

上向き削りでは，右図に示すように，工具回転による刃先の移動方向と被削材の送り方向が逆向きとなるように切削運動させる．



特徴の説明　14

工具の被削材に対する切込み深さが最初はほぼ０であるが，回転の位相が進むにつれて単調に増加する．それゆえ，工具への加工負荷も緩やかに増加し，下向き削りの場合のように衝撃的に加工力が作用することがないので，重切削適性が高い．一方で，切込み深さが浅い場合は被削材に工具が乗り上げてしまい，加工できなくなる．切削面の仕上がりが良いので，フライス削りでは主として上向き削りによって加工が行われる．

4．溶接割れは，その原因によって高温割れと低温割れに大別される．それぞれの原因，破面の特徴，対策を説明せよ．

割れ	原因　各 4 計 8	破面の特徴　各 3 計 6	対策　各 5 計 10
高温割れ	凝固過程や凝固後の冷却過程で結晶粒界にリン(P)や硫黄(S)が濃化して結晶粒界が脆化することが原因で生じる．	結晶粒界を経路とする脆性破面であるが，破面開口後の表面に P や S が凝固するため，球状の P や S が表面を覆っている．	P や S の濃度は溶加材よりも母材の方が高いため，母材の溶け込みを抑え，溶融池内の溶加材比率を高めることで抑制することができる．
低温割れ	低温割れは，溶接部近傍がマルテンサイト変態するとともに，結晶粒界に水素が拡散濃縮して結晶粒界脆化を生じることが原因で生じる．	結晶粒界を経路とする脆性破面であり，平滑な表面で構成された多面集合体となる．	マルテンサイト変態を抑制するためには被接合材を予熱して冷却速度を低下させることが有効である．また，水素の主たる供給源は開先表面に付着した水分であるので，溶接前に被接合材を予熱して水分を気化除去することが有効である．

受験科目名
機械工作法