問題１　右図に示すノコギリ波について，以下の問いに答えよ．

（１）$f(t)$を式で表せ．

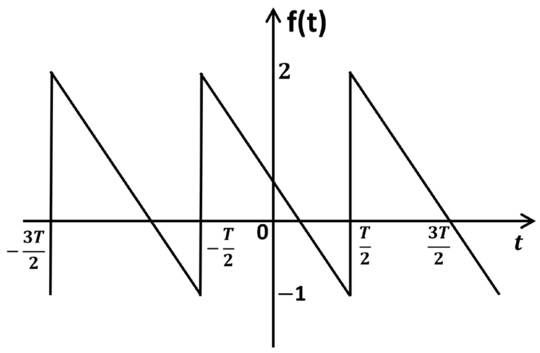


図　ノコギリ波

答 $f(t) =$ $-\frac{3}{T}t+\frac{1}{2}\quad\left(-\frac{T}{2}<t<\frac{T}{2}\right)$

（２）周期関数$f(t)$は以下のようにフーリエ級数展開することが出来る．

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t)\qquad\text{(I)}$$

ここで，a_nおよびb_nはフーリエ係数であり，以下の式で求められる．

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos n\omega t\,dt\quad(n=0,1,2,\cdots),\qquad b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\sin n\omega t\,dt\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

この積分を実行してa_0, a_n, b_nを求めよ．

$\frac{1}{2}$を左辺に移項して$f(t)-\frac{1}{2}$のフーリエ変換を考える。奇関数なので$a_n=0$。b_nだけ計算すれば良い。

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left(-\frac{3}{T}t\right)\sin n\omega t\,dt$$

$$=-\frac{6}{T^2}\left\{\left[-\frac{1}{n\omega}t\cos n\omega t\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}-\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}-\frac{1}{n\omega}\cos n\omega t\,dt\right\}=\frac{3}{n\pi}\cos n\pi$$

最初に左辺に移項した$\frac{1}{2}$は$\frac{a_0}{2}$として右辺に戻せば目的のフーリエ級数が得られる。

答　$a_0=$ 1，$a_n=$ 0，　$b_n=\frac{3}{n\pi}\cos n\pi$

（３）$f(t)$をフーリエ係数を用いて表わせ．ただし，フーリエ級数は n=3 まで採用せよ．

答 $f(t)=$ $\frac{1}{2}+\frac{3}{\pi}\left(-\sin\omega t+\frac{1}{2}\sin 2\omega t-\frac{1}{3}\sin 3\omega t\right)$

受験科目名
数学

問題２　以下の非同次方程式に関する問に答えよ．

$$\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=xe^x \qquad (a)$$

(1)　(a)式の右辺を 0 と置いた同次方程式の解を求めよ．（

(2)　(a)式の解の形を$(Ax+B)e^x$と仮定して非同次方程式の特殊解を求めよ．

(3)　(1)，(2)の結果を用いて一般解を示せ．

(4)　初期値として$y(0)=1, \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=0$を満たす解を求めよ．

(1)　解をe^{kx}と仮定すると特性方程式は$k^2-5k+6=0$となり、$k=2,3$を得る。
従って同次解は以下のようになる。

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$$

(2)　仮定した特殊解の微分を計算する。

$$y'=Ae^x+(Ax+B)e^x=(Ax+A+B)e^x$$
$$y''=Ae^x+(Ax+A+B)e^x=(Ax+2A+B)e^x$$

よって、$(Ax+2A+B)e^x-5(Ax+A+B)e^x+6(Ax+B)e^x=(2Ax-3A+2B)e^x=xe^x$より、

$$2Ax-3A+2B=x$$

よって

$$\begin{cases} 2A=1 \\ -3A+2B=0 \end{cases}$$

従って、$A=\frac{1}{2}, B=\frac{3}{4}$となり特殊解は以下のようになる。

$$y=\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\right)e^x$$

(3)　ここまでの結果より一般解は以下のようになる。

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\right)e^x$$

(4)$y(0)=1$より、$y(0)=C_1+C_2+\frac{3}{4}=1$

$$y'=2C_1e^{2x}+3C_2e^{3x}+\frac{1}{2}e^x+\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\right)e^x$$

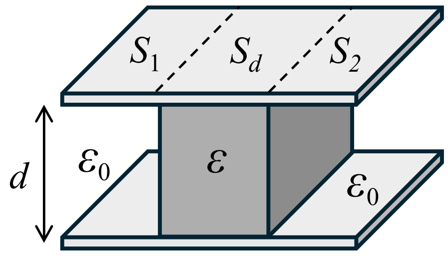
$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=0$より$y'(0)=2C_1+3C_2+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=0$

よって、$C_1=2, C_2=-\frac{7}{4}$となり、一般解は以下のようになる。

$$y=2e^{2x}-\frac{7}{4}e^{3x}+\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\right)e^x$$

受験科目名
数学

１．右図の様に、面積 S，厚さ d の平行平板コンデンサの一部に誘電率 ε の誘電体を挿入した。誘電体の厚みは d で長さは極板の奥行きと一致する。また、ε_0 は真空中の誘電率を表すものとする。誘電体がない部分の極板の面積をそれぞれ S_1，S_2 とし、誘電体が挿入されている部分の面積を S_d としたとき、以下の問いに答えなさい。



(a) 平行平板コンデンサを、面積 S_1，S_2，S_d のコンデンサを並列に接続したものと考え、それぞれの静電容量 C_1，C_2，C_d を求めなさい。

(b) 平行平板コンデンサの静電容量 C と、C_1，C_2，C_d の関係式を示しなさい。

(c) (a)及び(b)の結果を用いて、平行平板コンデンサの静電容量 C を求めなさい。

＜解答例＞

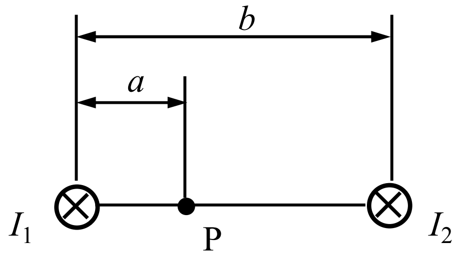
(a) $C_1 = \dfrac{\varepsilon_0 S_1}{d}$ ， $C_2 = \dfrac{\varepsilon_0 S_2}{d}$ ， $C_d = \dfrac{\varepsilon S_d}{d}$

(b) $C = C_1 + C_2 + C_3$

(c) $C = \dfrac{\varepsilon_0 \left(S_1 + S_2\right) + \varepsilon S_d}{d} = \dfrac{\varepsilon_0 \left(S - S_d\right) + \varepsilon S_d}{d}$

受験科目名
電磁気学

２．真空中に、長さが無限大で平行に設置された導体があり、導体に流れる電流の向きは同じで、大きさをそれぞれ I_1, I_2 とする。導体間の距離を b とし、右図の様に電流 I_1 から a だけ離れた点を P とするとき、以下の問いに答えなさい。



(a) 点 P において、電流 I_1 により発生する磁界の大きさ H_1 を示しなさい。

(b) 点 P において、電流 I_2 により発生する磁界の大きさ H_2 を示しなさい。

(c) (a)及び(b)の結果を用い、点 P での磁界の強さが 0 になる様な距離 a を示しなさい。

＜解答例＞

(a) $H_1 = \dfrac{I_1}{2\pi a}$

(b) $H_2 = \dfrac{I_2}{2\pi (b-a)}$

(c) 題意より $H_1 = H_2$ となるため、$\dfrac{I_1}{a} = \dfrac{I_2}{b-a}$

a について解くと $a = \dfrac{I_1 b}{I_1 + I_1}$ が求まる。

３．断面積 1m^2 の円形コイルと鎖交する一様な磁束の磁束密度が、1 秒の間に 2Wb/m^2 から 5Wb/m^2 まで増加した。
以下の問いに答えなさい。

(a) 磁束の変化Δφを示しなさい。

(b) 円形コイルに誘起する起電力の大きさ e を求めなさい。

＜解答例＞

(a) $\Delta B = 3\mathrm{Wb/m^2}$, $\Delta\phi = 3\mathrm{Wb}$

(c) $e = \left| -\dfrac{d\phi}{dt} \right| = B\left(b^2 - a^2\right) = 3V$

受験科目名
電磁気学

[1] $PI_1 = RI_2 + pI_3$ —①

$QI_1 = xI_2 + qI_3$ —②

$I_3(p+q) = r(I_2 - I_3)$ ③

$I_3(p+q+r) = rI_2$

③'を①,②に代入 $I_3 = \dfrac{r}{p+q+r} I_2$ —③'

$PI_1 = RI_2 + \dfrac{pr}{p+q+r} I_2$ —④

$QI_1 = xI_2 + \dfrac{qr}{p+q+r} I_2$ —⑤

$\dfrac{P}{Q} = R + \dfrac{pr}{p+q+r} \Big/ x + \dfrac{qr}{p+q+r}$ $\qquad \dfrac{P}{Q} = \dfrac{p}{q}$

$x + \dfrac{qr}{p+q+r} = \dfrac{Q}{P}\left(R + \dfrac{pr}{p+q+r}\right)$

$= \dfrac{Q}{P}R + \dfrac{q}{p} \cdot \dfrac{pr}{p+q+r}$

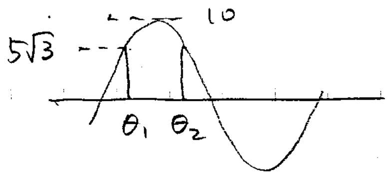
$= \dfrac{Q}{P}R + \dfrac{qr}{p+q+r}$.

$x = \dfrac{Q}{P}R$ ⊣

[2.] $\theta = \omega t$ とする.

$d\theta = \omega dt$

t	$0 \to 30\,\mathrm{ms}$
θ	$0 \to 2\pi$



(i) $10\sin\theta = 5\sqrt{3}$

$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \cdots$

$$I_a = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi/3}^{2\pi/3} 10\sin\theta\, d\theta$$

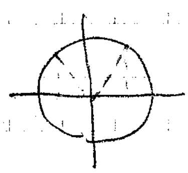
$$= \frac{1}{2\pi}\left[-10\cos\theta\right]_{\pi/3}^{2\pi/3}$$

$$= \frac{-10}{2\pi}\left(\cos\frac{2}{3}\pi - \cos\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\frac{5}{\pi}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= 5/\pi$$

$I_a = 1.6\,\mathrm{A}$



(ii) $$I^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} 10^2\sin^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{10^2}{2\pi}\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{10^2}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{\pi/3}^{2\pi/3}$$

$$= \frac{10^2}{2^2\pi}\left\{\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$$

$$= \frac{5^2}{\pi}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 5^2\left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\right)$$

$$\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1.73}{2\times 3.14}$$

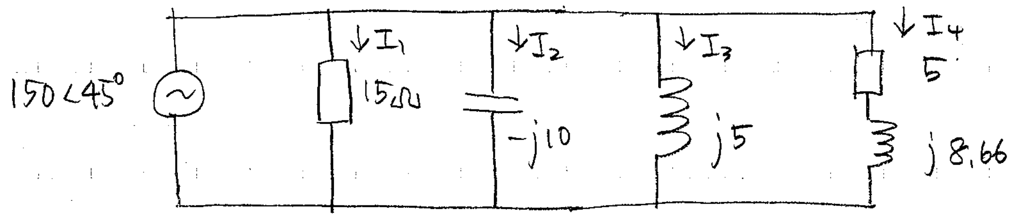
$$= 0.609$$

$I > 0$ なので

$\therefore I = 5\cdot\sqrt{0.609}$

$= 3.9\ \mathrm{A}.$

[3]



$$Y_1 = \frac{1}{15}, \quad Y_2 = \frac{1}{-j10}, \quad Y_3 = \frac{1}{j5}, \quad Y_4 = \frac{1}{5(1+j\sqrt{3})}$$

$$Y_1 = \frac{1}{15} = 0.0667 + j0$$

$$Y_2 = \frac{1}{-j10} = \quad j0.1$$

$$Y_3 = \frac{1}{j5} = \quad -j0.2$$

$$Y_4 = \frac{1}{5(1+j\sqrt{3})} = \frac{1-j\sqrt{3}}{5(1+3)} = 0.05 - j0.0865$$

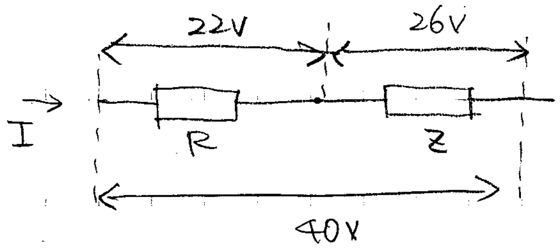
$$Y = 0.117 - j0.187 = 0.22\angle -58^\circ$$

$$I = YV$$

$$I = (0.22\angle -58^\circ)(150\angle 45^\circ)$$
$$= 33\angle -13^\circ$$
$$= 33(\cos(-13^\circ) + j\sin(-13^\circ))$$
$$= 33(0.974 - j0.225)$$
$$= \underline{\underline{32 - j7.5}}$$

No.

[4]



$R = 11$

$$I = \frac{22}{11} = 2A.$$

$$Z = \frac{26}{2} = 13\,\Omega \qquad Z = r + jX \text{ とする.}$$

$$r^2 + X^2 = 13^2 \quad \text{—①}$$

$$Z_T = \frac{40}{2} = 20\,\Omega$$

$$(11+r)^2 + X^2 = 20^2 \quad \text{—②}$$

②−①

$$(11+r)^2 - r^2 = 20^2 - 13^2$$

$$11 \times (11+2r) = 7 \times 33$$

$$11 + 2r = 7 \times 3 = 21$$

$$2r = 21 - 11 = 10$$

$$r = 5\,\Omega.$$

$$5^2 + X^2 = 13^2$$

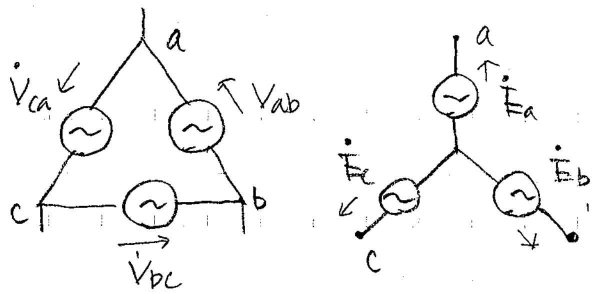
$$X^2 = 13^2 - 5^2 = 8 \times 18 = 16 \times 9 = 12^2$$

$$X = \pm 12.$$

$$\therefore\ \underline{\underline{\dot{Z} = 5 \pm j12}}$$

No.

[5]



$$\dot{V}_{ab} = \sqrt{3}\, e^{j\frac{\pi}{3}}\, \dot{E}_a$$

$$E_a = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-j\frac{\pi}{6}} \cdot \dot{V}_{ab} = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-j\frac{\pi}{6}} \cdot \sqrt{3}\, e^{j\frac{\pi}{6}}\ 120 = 120$$

$$E_b = 120$$

$$E_c = 120$$

$$\dot{I}_a = \frac{\dot{E}_a}{\dot{Z}_r} = \frac{120}{20\, e^{-j\frac{\pi}{6}}} = 6\, e^{j\frac{\pi}{6}}$$

$$\dot{I}_b = a^2 \dot{I}_a = 6\, e^{j\frac{\pi}{6}} \cdot e^{-j\frac{2}{3}\pi} = 6\, e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$\dot{I}_c = a\, I_a = 6\, e^{j\frac{\pi}{6}} \cdot e^{j\frac{2}{3}\pi} = 6\, e^{j\frac{5}{6}\pi}$$

$$P_3 = 3\, E\, I_r \cos\varphi$$

$$P_3 = 3 \times 120 \times 6 \times \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2160 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \underline{\underline{1871\,\text{W}}}$$

1. 図 1 はセンサと計測器を接続したときのセンサの出力インピーダンス Z_{out} と計測器の入力インピーダンス Z_{in} の関係を表したものである。センサの出力電圧 V_s を 10 V，出力インピーダンス Z_{out} を 50 kΩ，計測器の入力インピーダンス Z_{in} を 350 kΩとする。以下の問いに答えよ。

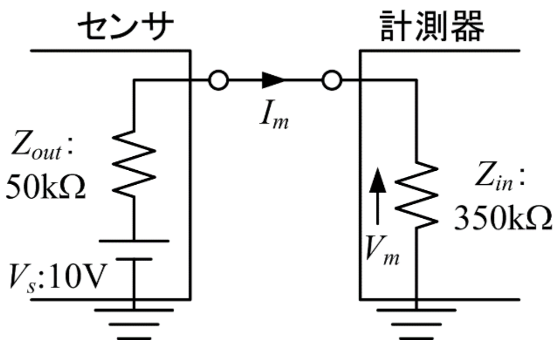


図 1

(1) この回路に流れる電流 I_m および計測器で測定される電圧 V_m を求めよ。答えが割り切れない場合には有効数字 3 桁で答えよ。

$I_m = \frac{10}{50.0\times10^3+350\times10^3} = 25\times10^{-6}\ \mathrm{A} = 25\ \mu\mathrm{A}$　(5 点)

$V_m = \frac{10.0\times350\times10^3}{50.0\times10^3+350\times10^3} = 8.75\ \mathrm{V}$　(5 点)

(2) 測定された電圧 V_m のセンサの出力電圧の真値(10 V)に対する誤差率の大きさを求めよ。答えが割り切れない場合には有効数字 2 桁で答えよ。

$\varepsilon = \frac{8.75-10.0}{10.0} = -0.125 \quad \therefore -0.125(-12.5\%)$　(5 点)

(3) V_m の誤差率の大きさを 0.05(5 %)以下とする為には計測器の入力インピーダンスを何Ω以上にすればよいか答えよ。答えが割り切れない場合には有効数字 2 桁で答えよ。

誤差率の大きさ 5%以下とするために必要な測定電圧 V_x とすると

$-0.05 = \frac{V_x-10.0}{10.0} \quad \therefore V_x = 9.5\ \mathrm{V}$

測定値 9.5 V 以上とするために必要な入力インピーダンスを Z_x とすると

$9.5 = \frac{10\times Z_x}{50\times10^3+Z_x} \quad \therefore Z_x = 950\times10^3 = 950\ \mathrm{k\Omega}$　(5 点)

(4) 高い入力インピーダンスの計測器を準備できない場合，どのようにすれば低い誤差率で測定できるか記述せよ。

ボルテージフォロワや増幅回路等を使って増幅する。　(5 点)

1. 図 2 の回路を用いた接地抵抗の測定に関して以下の問に答えよ。

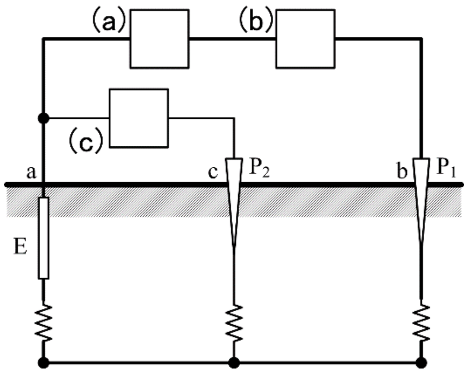
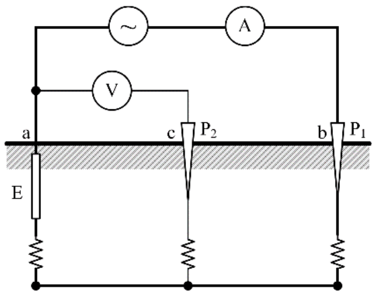


図 2

(1) 地中に埋め込んだ接地棒の接地抵抗の測定において，交流電源，電圧計，電流計を図中の空欄(a)～(c)に描き込み，回路図を完成させよ。



(3 点×3)

(2) 接地の目的を 2 つ以上答えよ。

人が感電する事を防止する，機器からノイズを除去するため，等　(3 点×2)

(3) 完成させた図を用いて接地抵抗の測定方法を述べよ。

接地電極 E とが十分離れた位置に補助接地電極 P1 を差し込む。E と P_1 の間に交流電圧を印加し，流れる電流 I を電流計で測定する。移動補助接地電極 P_2 を a 点から b 点まで移動しながら電位降下(電圧 V)を電圧計で測定し，電圧が一定となった所の電圧を V_1 とする。接地電極の抵抗 R は，$R = \frac{V_1}{I}$ [Ω]で求められる。

(10 点)

1. 単相電力計を 2 台用いて，三相平衡回路の電力を測定するため，図 3 のように配線した。各インピーダンス，各相電圧，線電流の大きさは以下の通り。各問に答えよ。

$$\overrightarrow{Z_a} = \overrightarrow{Z_b} = \overrightarrow{Z_c} = 80 + \mathrm{j}60\ \Omega$$
$$E_a = E_b = E_c = 100\ \mathrm{V}$$
$$I_a = I_b = I_c = 1\ \mathrm{A}$$

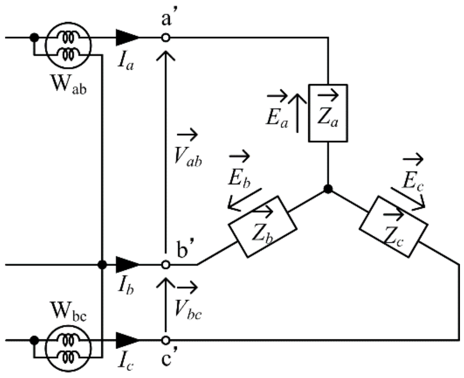


図 3

(1) 各負荷の消費電力および全消費電力を求めよ。

線間電圧$V = \sqrt{3}E = 100\sqrt{3}\ \mathrm{V}$，力率$\cos\theta = \frac{80}{\sqrt{80^2+60^2}} = \frac{80}{100} = \frac{4}{5} = 0.8$，$\sin\theta = \frac{60}{\sqrt{80^2+60^2}} = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$

各負荷の消費電力はそれぞれ$EI\cos\theta = 100 \times 1 \times 0.8 = 80\ \mathrm{W}$　(5 点)

全消費電力は$3 \times 80\ \mathrm{W} = 240\ \mathrm{W}$または$\sqrt{3}VI\cos\theta = \sqrt{3} \times 100\sqrt{3} \times 0.8 = 240\ \mathrm{W}$　(5 点)

(2) 電力計W_{ab}，W_{bc}の指示値P_{ab}，P_{bc}をそれぞれ求め，2 台の電力計で全消費電力が測定できることを示せ。なお，計算においてルート(√)はそのままでよい。

$P_{ab} = VI\cos\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) = 100\sqrt{3} \times 1 \times \left(\cos\frac{\pi}{6}\cos\theta + \sin\frac{\pi}{6}\sin\theta\right) = 100\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{4}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\right) = 120 + 30\sqrt{3}\ \mathrm{W}$　(5 点)

$P_{bc} = VI\cos\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right) = 100\sqrt{3} \times 1 \times \left(\cos\frac{\pi}{6}\cos\theta - \sin\frac{\pi}{6}\sin\theta\right) = 100\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{4}{5} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\right) = 120 - 30\sqrt{3}\ \mathrm{W}$　(5 点)

2 台の電力計の指示値の和は 240 W　(5 点)

受験科目名
電気電子計測

1. 1Ω 以下の低抵抗を電圧電流法で測定することに関して，以下の問いに答えなさい。

(1) 図 4 のような二端子抵抗器を使った場合，何が問題となるか答えよ。ただし，図中の R は測定抵抗，r はリード線の抵抗および接触抵抗の和を表す。

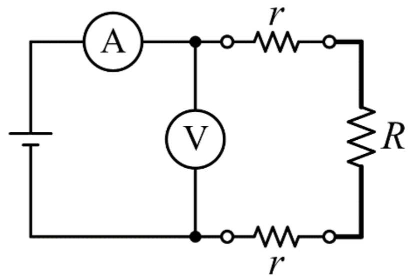


図 4　二端子抵抗器

測定抵抗の抵抗 R が小さい場合，リード線の抵抗 r にも測定抵抗 R と同じ電流が流れ，そこで起きるの電位降下が無視できない。このリード線の抵抗 r で起きる電圧降下が電圧計で測定されるため，測定電流 I と測定電圧 V から求める抵抗値は大きな誤差を含んだ値となる。(12 点)

(2) 上記(1)の問題を解決する方法として図 5 のような四端子抵抗器が使われるが，問題が解決する理由を答えよ。ここで，r_c，r_pはリード線の抵抗及び接触抵抗の和を表す。

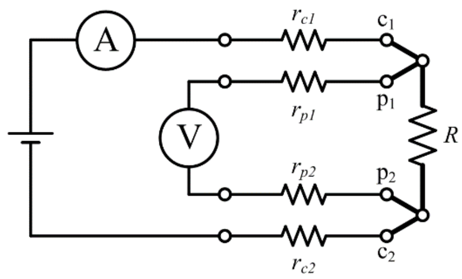


図 5　四端子抵抗器

(2)電圧計と測定抵抗をつなぐリード線の抵抗 rp に流れる電流は，測定抵抗 R に流れる電流に比べて無視できるほど小さくなる。そのため，電圧計で測定される測定値からリード線の抵抗 rp の影響が無視できるようになる。そのため，測定電流 I と測定電圧 V から求める抵抗値に含まれる誤差は無視できるほど小さくなる。(13 点)

受験科目名
電気電子計測