

# 可変的フィルタ理論とフィルタリングによる構造損傷同定解析

登坂 宣好 (数理情報工学科)

## 1. はじめに

構造損傷同定問題を代表的な例とする逆問題は、その順問題が線形問題で解の唯一性や安定性が成立する場合でも、それらの性質が保障されない、いわゆる非適切問題 (ill-posed problem) となることが知られている<sup>1)</sup>。

そこで、このような逆問題を解くには何らかの適切化または正則化手法 (regularization technique) を導入しなければならない。その手法として様々な手法が知られているが、特に Tikhonov の正則化が多用されている<sup>1)</sup>。

これまで逆問題の解析に、Kalman フィルタを始めとするフィルタ理論を適用する研究が続けてきた。このフィルタ理論の中でもパラメトリック射影フィルタ (parametric projection filter; PPF) 理論<sup>2)</sup> と Tikhonov の正則化手法との関連に注目し、PPF に含まれるパラメータが正則化パラメータとしての役割を果たすことを明らかにした<sup>3)</sup>。

PPF を逆解析に適用する際には、最適なパラメータの選定が必要となる<sup>4)~6)</sup>。そこで、このパラメータをひとたび設定したら固定することなくフィルタリング計算過程で可変的に変化させて行くことによって、パラメータの選定という問題点が解決できるような新しいフィルタリングを構成し、“可変的フィルタ理論”とそのフィルタリングアルゴリズムを提案した<sup>7)</sup>。

本研究報告では、この理論とそのフィルタリングアルゴリズムを構成し、その適用性を構造損傷同定問題に対して得られた計算結果を通して示す。

## 2. 可変的フィルタ理論

### 2.1 数理モデル

逆問題を離散的立場から取り扱うものとする。つまり、推定または同定すべき未知量を有限次元のベクトルとすると、その逆問題の数理モデルは次のような簡単なモデルとして与えることができる。

- 観測方程式 (システム方程式)

$$\mathbf{y} = \mathbf{M}\mathbf{z} + \mathbf{v} \quad (1)$$

- 推定方程式 (復元方程式)

$$\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{B}\mathbf{y} \quad (2)$$

ここでベクトル  $\mathbf{z}$  は推定または同定すべき原ベクトル、 $\mathbf{y}$  は観測ベクトル、 $\tilde{\mathbf{z}}$  は  $\mathbf{z}$  に対する推定ベクトル、 $\mathbf{v}$  は観測に伴い混入する雑音ベクトル、行列  $\mathbf{M}$  は観測行列、 $\mathbf{B}$  は推定行列 (復元行列) とする。なお、上式中のベクトルは雑音ベクトル  $\mathbf{v}$  の存在によりいずれも確率変数 (ベクトル) として取り扱わねばならない。

この数理モデルにより、逆問題は、観測行列  $\mathbf{M}$  を与えてノイズ  $\mathbf{v}$  の統計的性質と与えられた観測ベクトル  $\mathbf{y}$  のもとで、次の評価基準を満たす  $\mathbf{z}$  の最良な推定ベクトル  $\tilde{\mathbf{z}}$  を定めることになる。

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{z}, \tilde{\mathbf{z}}) \rightarrow \text{Min} \quad (3)$$

したがって、この最小化問題の解  $\mathbf{z}$  を与えるような推定行列  $\mathbf{B}$  を具体的に構成されなければならない。

### 2.2 フィルタ理論

推定行列  $\mathbf{B}$  を線形不偏推定条件のもとで構成することになると  $\mathbf{z}$  の期待値  $\bar{\mathbf{z}}$  を用いて推定ベクトルは次のように与えられる。

$$\tilde{\mathbf{z}} = \bar{\mathbf{z}} + \mathbf{B}\{\mathbf{y} - \mathbf{M}(\bar{\mathbf{z}})\} \quad (4)$$

したがって、推定行列  $\mathbf{B}$  が具体的に与えられれば、観測ベクトル  $\mathbf{y}$  を用いて上式 (4) から推定ベクトル  $\tilde{\mathbf{z}}$  が決定できる。

この推定行列として、評価基準 (3) の具体的な表現に対応して Wiener フィルタ、射影フィルタ、パラメトリック射影フィルタが存在している<sup>1)</sup>。これらのフィルタの中でも本論で対象とするフィルタはパラメトリック射影フィルタである。このフィルタは次の評価基準に対して構成される<sup>2)</sup>。

評価基準：

$$J(\mathbf{B}) := \text{tr}\{(\mathbf{B}\mathbf{M} - \mathbf{P})(\mathbf{B}\mathbf{M} - \mathbf{P})^T\} + \gamma \mathbf{E}_v [\|\mathbf{B}\mathbf{v}\|^2] \quad (5)$$

パラメトリック射影フィルタ：

$$\mathbf{B} = \mathbf{M}^T (\mathbf{M} \mathbf{M}^T + \gamma \mathbf{Q})^{-1} \quad (6)$$

ただし、 $\gamma > 0$  はいわゆる  $s/n$  としての意味を有するパラメータであり、 $\mathbf{P}$  は射影行列とし、 $T$  は行列の転置操作を示し、 $\text{tr}$  は行列のトレース操作とし、雑音共分散行列  $\mathbf{Q}$  を以下のように定義する。

$$\mathbf{Q} := E[\mathbf{v}\mathbf{v}^T] \quad (7)$$

### 2.3 可変的パラメトリック射影フィルタ

パラメトリック射影フィルタ(6)には、パラメータ  $\gamma$  が含まれているので、このフィルタを用いて推定を行うには  $\gamma$  の具体的な数値が必要となる。この数値の決定に関して、本論では以下に示すような可変的決定手法を導入することによって、任意の初期値からフィルタリングの計算過程を通して自律的に適切な数値を取ることのできるパラメトリック射影フィルタリングアルゴリズムを構成する。

線形不偏推定式(4)に基づくフィルタリングアルゴリズムにおけるフィルタ方程式とフィルタゲインは次のように与えられる。

フィルタ方程式：

$$\tilde{\mathbf{z}}_{k-1/k} = \tilde{\mathbf{z}}_{k/k} = \tilde{\mathbf{z}}_{k/k-1} + \mathbf{B}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{M}_k \tilde{\mathbf{z}}_{k/k-1}) \quad (8)$$

フィルタゲイン：

$$\mathbf{B}_k = \mathbf{M}_k^T (\mathbf{M}_k \mathbf{M}_k^T + \gamma \mathbf{Q}_k)^{-1} \quad (9)$$

ただし、推定ベクトル初期値を次のように与えるものとする。

$$\tilde{\mathbf{z}}_{0/-1} = \bar{\mathbf{z}}_0 \quad (10)$$

ここで、初期ステップにおいて、推定ベクトル  $\tilde{\mathbf{z}}'_{0/-1}$  は観測ベクトル  $\mathbf{y}_0$  のみによって決定しているため、それらに比例関係が成り立つものと仮定すると次のように書くことができる。

$$\tilde{\mathbf{z}}'_{0/-1} \doteq \mathbf{A}_0 \mathbf{y}_0 (= \mathbf{A}_0 \mathbf{M}_0 (\tilde{\mathbf{z}}'_{0/-1})) \quad (11)$$

ただし、行列  $\mathbf{A}_0$  は対角行列とする。一方、初期ステップのフィルタ方程式は式(8)より次のように書くことができる。

$$\tilde{\mathbf{z}}'_{0/-1} \doteq \mathbf{B}_0 \mathbf{y}_0 \quad (12)$$

これらの式を等置することによって次式を得る。

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0 \mathbf{y}_0 &= \mathbf{B}_0 \mathbf{y}_0 \\ &= (\mathbf{M}_0^T \mathbf{Q}_0^{-1} \mathbf{M}_0 + \gamma \mathbf{I})^{-1} \mathbf{M}_0^T \mathbf{Q}_0^{-1} \mathbf{y}_0 \end{aligned} \quad (13)$$

パラメトリック射影フィルタの表現(6)より、パラメータの初期値に関する次の関係式を得る。

$$\gamma_0 \tilde{\mathbf{z}}'_{0/-1} = \mathbf{b}_0 \quad (14)$$

ただし、

$$\mathbf{b}_0 = \mathbf{M}_0^T \mathbf{Q}_0^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{M}_0 \mathbf{A}_0) \mathbf{y}_0 \quad (15)$$

以上より、 $\gamma_0$  は  $\tilde{\mathbf{z}}'_{0/-1}$  と  $\mathbf{b}_0$  との内積と  $\tilde{\mathbf{z}}'_{0/-1}$  のノルムとを用いて次式で与えられる。

$$\gamma'_0 = \frac{\tilde{\mathbf{z}}'_{0/-1} \cdot \mathbf{b}_0}{\|\tilde{\mathbf{z}}'_{0/-1}\|^2} \quad (16)$$

このように求められた  $\gamma'_0$  を含んだパラメトリック射影フィルタを構成し、フィルタ方程式より  $\tilde{\mathbf{z}}'_{0/-1}$  を求める。これらの計算を  $\gamma$  の値が収束するまで繰り返し、その収束値をフィルタリング 1 回目の値とする。同様にして各フィルタリングのステップにおいて収束値の  $\gamma$  を決定することになる。

### 3. 構造損傷同定問題への適用

#### 3.1 解析モデル

曲げおよびせん断応力による応力伝達機構を有する構造物として Fig.1 に示す鋼製フレーム構造物モデルを例に可変的パラメトリック射影フィルタによる構造損傷同定解析を行う。本モデルは文献5), 6) において観測値に実測値を用いてウィナーフィルタ, 射影フィルタおよび既存のパラメトリック射影フィルタによって損傷同定解析が報告されており, モデルの詳細を表1に示す。

#### 3.2 同定解析結果

Fig.2(a)~(e)に損傷同定解析例として1~5層に損傷として50%の剛性低下を仮定した場合の同定結果と可変的に決定された各フィルタリングステップにおける $\gamma$ の推移を示す。

なお, 損傷位置の同定については評価値の概念を文献6)の手法に従い導入した。すなわち, 評価値 $J_n$ が最も大きな値を示す層が損傷位置として同定されることになる。

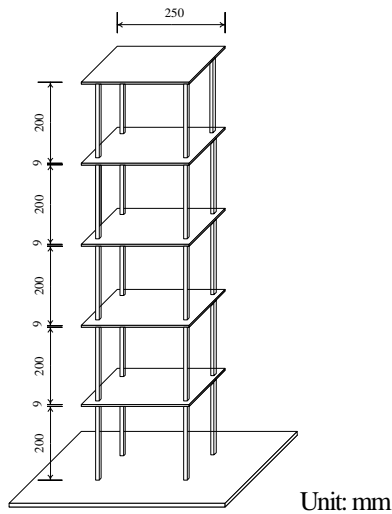
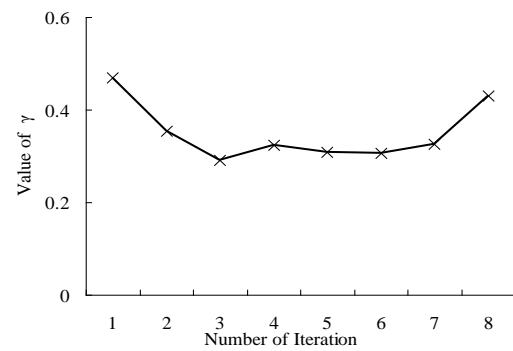
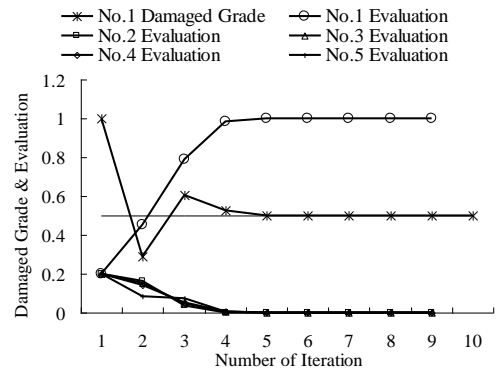


Fig.1 解析モデル

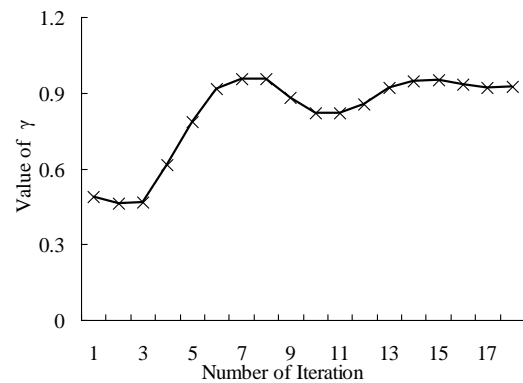
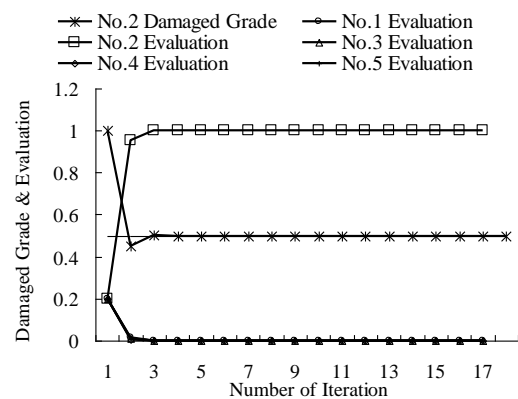
Table1 モデル諸元

柱 (mm)	60×60
階高 (mm)	200
スラブ (mm)	250×250×9.0
E (N/mm <sup>2</sup> )	2.05×10 <sup>5</sup>
質量 (kg)	295

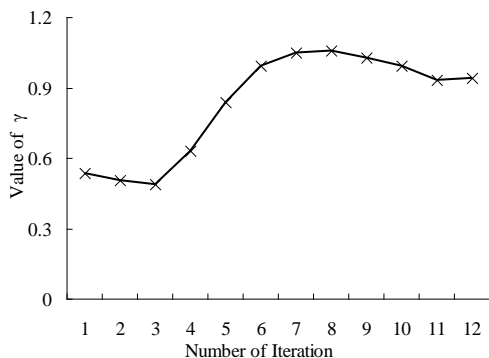
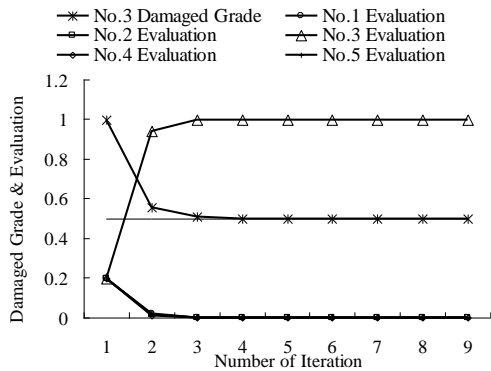
以下に示す結果の横軸はフィルタリング回数を, 縦軸は損傷を仮定した状態量の無次元量と損傷位置の可能性を意味する評価値を表している。



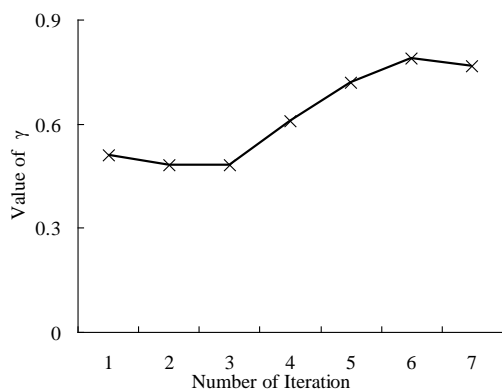
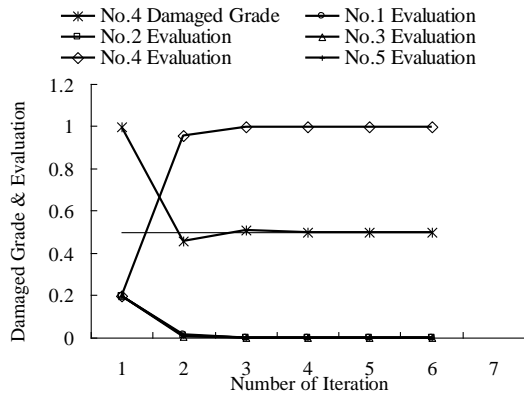
(a)1層損傷の同定結果と $\gamma$ の変化



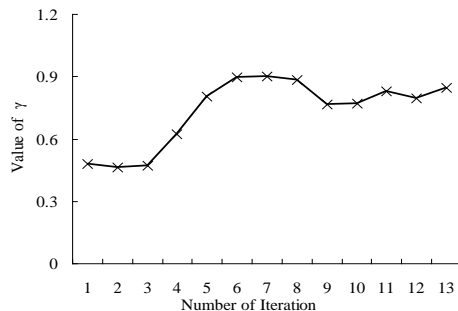
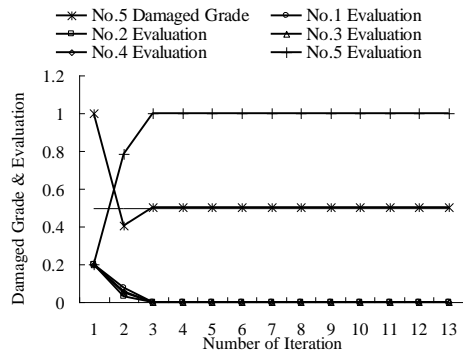
(b)2層損傷の同定結果と $\gamma$ の変化



(c) 3層損傷の同定結果と  $\gamma$  の変化



(d) 4層損傷の同定結果と  $\gamma$  の変化



(e) 5層損傷の同定結果と  $\gamma$  の変化

Fig.2 構造損傷同定解析結果

#### 4. おわりに

本報告ではこれまで逆問題へのフィルタリングアルゴリズムの適用において問題となっていたパラメトリック射影フィルタのパラメータ  $\gamma$  の決定について、自律的に定められる手法を示した。すなわち、パラメータ  $\gamma$  を可変的に変化させることによって新しい適応型のフィルタリングアルゴリズムが構成できた。ここではそのアルゴリズムの適用例として比較的シンプルな構造損傷同定解析を示したが、今後はさらに複雑な同定問題への適用を通して、アルゴリズムの有効性を追求して行きたい。

#### 参考文献

- 1) 登坂宣好, 大西和榮, 山本昌宏: 逆問題の数理と解法, 東京大学出版会, 1999
- 2) Oja, E., H. Ogawa: Parametric Projection Filter for Image and Signal Restoration, IEEE Trans. Acoust. Speech and Signal Processing, ASSP-34, pp. 1643-1653, 1986
- 3) 登坂宣好, 遠藤龍司, 川上善嗣: 離散的逆問題における射影フィルタと適切化法, 日本大学生産工学部第32回学術講演会講演梗概集, pp. 73-76, 1999
- 4) 遠藤龍司, 登坂宣好, 川上善嗣, 塩田寿美子: パラメトリック射影フィルタに基づくアルゴリズムを用いた大型浮遊式海洋建築模型の損傷同定解析, 日本建築学会構造系論文集, 第559号, pp. 237-244, 2002
- 5) R. Endo, N. Tosaka: Structural Damage Analysis of a Frame Structure Model using Filtering Algorithms, Proceedings 7<sup>th</sup> Civil-Comp. Paper 241, 2004
- 6) 塩田寿美子, 遠藤龍司, 登坂宣好: フィルタ理論に基づくフレーム構造物の損傷同定解析, 日本建築学会構造系論文集, 第605号, pp. 95-102, 2006
- 7) 遠藤龍司, 登坂宣好, 川上善嗣: 可変的 PPF を用いたフレーム構造物の損傷同定解析, 日本機械学会 2006 年度年次大会講演論文集, Vol.6, pp.87-88, 2006