

有限要素法によるチャネル乱流の LES

角 田 和 彦 (数理情報工学科)

三 浦 慎 一 郎 (都立高専・機械)

登 坂 宣 好 (数理情報工学科)

1. はじめに

単純な形状の乱流場を除いて実用性の高い複雑乱流場の数値計算を行う場合、流れの運動方程式を直接解く、いわゆる直接シミュレーション (Direct numerical simulation; DNS) を行うことは困難である。そこで何らかのモデル化が行われるのが一般的であるが、非定常性・3次元性・局所性の強い乱流場の計算は、Large eddy Simulation(LES) を用いた解析が有力である。

乱流計算の数値計算法は、DNS ではスペクトル法や最近では差分法が用いられるようになってきた。一方、有限要素法による乱流計算は、差分法や有限体積法などと比べて計算機資源の問題や数学的にやや高度な定式化が必要となり、あまり用いられていないのが現状である。しかしコンピュータの発達や並列化アルゴリズムの開発などによりこの問題は克服されつつあり、工学的問題への適用性を考えると重要な役割を果たすものと考えられる。

これまでの有限要素法を用いた基礎的な乱流計算は、大島らは $Re_\tau = 180$ におけるチャネル乱流の LES 計算例があるが、レイノルズ応力が圧力勾配よりも大きくなるという非物理的な現象が見られたことから、チャネル内のスラブ要素から節点応力を求める方法を提案し、レイノルズ応力が DNS の結果とほぼ一致した結果が得られたことを示した^[1]。また、楨原ら^[2]は有限要素スキームにおける乱流計算のための運動量保存性について数値計算により議論され、良く用いられる勾配型に比べて発散型での定式化の方が良い結果が得られている。また最近、Hughes らは有限要素法にマルチスケール法の概念を導入し、LES に基づく Smagorinsky モデルにおいて壁面に減衰関数を用いなくとも高精度な計算が行えることを示した^[3]。

本研究では差分法において DNS との比較では良い結果が示されているものの、有限要素法におけるチャネル乱流計算はあまり議論されていないため、Kim らの DNS データ^[4]による計算の比較を行うことで、有限要素スキームの有効性についてさらに深い議論を行うことを目的とする。特にこれまでの有限要素法によるチャネル乱流計算は、メッシュ解像度が充分でない場合が多かったと思われるため、差分法と同程度のメッシュ解像度により計算を行い DNS と比較する。乱流モデルは Large eddy simulation(LES) に基づく単純 Smagorinsky モデル^{[5],[6]}を用いる。Smagorinsky モデルは、Smagorinsky 定数の最適化、壁近傍での修正、Backward scatter 効果の表現が出来ないなどの問題が示されているものの、平行平板間の乱流計算では良好な結果が示されているため、本計算で用いる。

2. LES 基礎方程式と有限要素スキーム

基礎方程式は非圧縮性粘性流体を仮定した Navier-Stokes 方程式と連続の方程式に対し、次式で表される壁面摩擦速度 u_τ 及び平板間の半値 δ を代表長さとして取るものとする。

$$u_i^+ = \frac{u_i}{u_\tau}, \quad x_i^* = \frac{x_i}{\delta}, \quad t^* = \frac{u_\tau}{\delta} t, \quad p^+ = \frac{p}{\rho u_\tau^2} \quad (1)$$

ここで上付き+は壁面摩擦速度 U_τ による無次元量、上付き*はチャネル半幅による無次元量を表す。

上式の無次元量を Navier-Stokes 方程式及び連続の式に

代入し、次の無次元化された Navier-Stokes 方程式を得る。

$$\frac{\partial u_i^+}{\partial t^*} + \frac{\partial (u_i^+ u_j^+)}{\partial x_j^*} = -\frac{\partial p^+}{\partial x_i^*} + \frac{1}{Re_\tau} \frac{\partial^2 u_j^+}{\partial x_j^{*2}} \quad (2)$$

ここで、 $Re_\tau = u_\tau \delta / \nu$ である。

さらに Large Eddy Simulation に基づく乱流モデルを導入するために、空間フィルタを仮定したフィルタリングを行う。フィルタ操作を Navier-Stokes 方程式に適用することにより、以下のフィルタリングされた方程式を得る。

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re_\tau} \frac{\partial^2 \bar{u}_j}{\partial x_j^2} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + f_i \quad (3)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4)$$

ここで、乱れの変動成分を含むレイノルズ応力は以下でモデル化される。

$$\tau_{ij} = \frac{2}{3} \delta_{ij} k_{sgs} - 2\nu_t \bar{S}_{ij} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \nu_t &= (C_s \Delta f)^2 (2\bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij})^{\frac{1}{2}} \\ \bar{S}_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \\ \bar{\Delta} &= (\bar{\Delta}_1 \bar{\Delta}_2 \bar{\Delta}_3)^{\frac{1}{3}} \\ f &= 1 - \exp\left(-\frac{y^+}{25}\right) \\ y^+ &= \frac{u_\tau y}{\nu} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

τ_{ij} は、本研究では単純 Smagorinsky モデルによりモデル化し、Van Driest 型の壁面減衰関数 f を併用する。フィルタ幅 Δ は個々の要素体積として与える。また、チャネル流れの状態を維持するために主流方向成分に関して $f_i = \delta_{i1}$ を与える。

運動方程式 (1) と連続の方程式 (2) の計算のアルゴリズムに分離解法の一つである fractional step 法を用いる。空間に関する離散化は、一般的なガラーキン有限要素法により定式化し、時間積分法は対流項及び拡散項に 2 次精度 Adams-Bashforth 法を適用した場合の有限要素方程式は以下のようになる。

$$M_{\alpha\beta} \bar{u}_{i\beta}^* = M_{\alpha\beta} \bar{u}_{i\beta}^n + \frac{\Delta t}{2} (3f_{i\alpha}^n - f_{i\alpha}^{n-1}) + F_{i\alpha} \Delta t \quad (7)$$

ただし、

$$f_{i\alpha}^n \equiv K_{\alpha\beta j} \bar{u}_{j\beta}^n \bar{u}_{i\beta}^n + \left(\nu_i^n + \frac{1}{Re_\tau} \right) D_{\alpha\beta} \bar{u}_{i\beta}^n \quad (8)$$

ここで $K_{\alpha\beta}$ は対流項、 $D_{\alpha\beta}$ は拡散項の係数行列をそれぞれ表す。

拡散項に 2 次精度 Crank-Nicolson 法、対流項に 2 次精度 Adams-Bashforth 法を適用した場合の有限要素方程式は以下ようになる。

$$\left[M_{\alpha\beta} + \frac{\Delta t}{2} \left(\nu_i^n + \frac{1}{Re_\tau} \right) D_{\alpha\beta} \right] \bar{u}_i^* = M_{\alpha\beta} \bar{u}_i^n - \frac{\Delta t}{2} \left[K_{\alpha\beta j} \{ 3\bar{u}_{j\beta}^n \bar{u}_{i\beta}^n - \bar{u}_{j\beta}^{n-1} \bar{u}_{i\beta}^{n-1} \} + \left(\nu_i^n + \frac{1}{Re_\tau} \right) D_{\alpha\beta} \bar{u}_{i\beta}^n \right] + F_{i\alpha} \Delta t \quad (9)$$

以上の有限要素方程式を全体系に重ね合わせて解く。対流項に関する離散化は、発散系を線形補間する方法を用いた。本計算で Crank-Nicolson を用いる場合は、垂直成分 (x_2) に関しての運動方程式にのみ適用する。その他、圧力に関する Poisson 方程式に対しても Galerkin 有限要素法を用いる。また補間関数は流速、圧力共に双 1 次補間関数を用いる。Crank-Nicolson 法を適用した場合の陰解法及び、圧力のポアソン方程式に関する連立方程式の解法には対角スケリング付き Bi-CGSTAB 法を用いる。陽解法における質量行列については、すべて Multi-pass アルゴリズム (3-pass) を用いる。また各係数行列に関する積分は、ガウスの数値積分法による 8 点積分方式を用いたが、対流項にのみ 1 点積分公式を適用した。

4. 領域分割法に基づく並列化

乱流計算のような大規模な数値計算を必要とする場合、計算速度及び記憶容量などの計算コストの問題から並列化を行うことを考える。ここでは PC クラスタによる分散メモリ型並列計算機を用いることから、領域分割法に基づく並列化を考える。複雑な形状を有するような流れ場においては、小領域の分割において均等化を図ることが困難な場合があるが、本研究においては形状が単純であるため、流れ方向に等分割するいわゆるスリッパ型で均等化を図った。また、小領域間のデータ交換を必要とする境界では、オーバーラップ領域を用いて計算精度の劣化を防ぐ。本研究で用いた PC クラスタの構成を表 1 に示す。

Table 1: PC cluster system

CPU	Intel Prescott 3.0GHz
Memory	1024MB(DDR400)
OS	Vine Linux 3.1
Fortran Compiler	Intel Fortran Compiler7.1
Network interface	1000Base-T(CSA)
Parallel Library	MPICH-1.2.6
Processors	4

ただし、分割数の小さい規模での計算においては粒度が小さく、CPU 負荷に比べて通信時間がボトルネックとなり、単一のシリアル計算の方が速い。したがって十分な並列化効率を得られないため、粒度の大きい計算にのみ PC クラスタによる並列計算を行う。

3. 計算条件及び計算結果

図 1 に本計算で利用した領域の概念図を示す。主流方向を x_1 、垂直方向を x_2 、スパン方向を x_3 とし、その長さはそれぞれ $2\pi\delta$ 、 2δ 、 $\pi\delta$ とし、主流方向及びスパン方向には周期境界条件を課す。要素分割方法は垂直方向成分には tanh 関数よりなる不等長要素とし、他の方向には等分割する。上下壁面の条件はすべり無し条件を与える。その他、壁座標系による要素分割数及びその幅について表 1 にまとめる。平均壁面摩擦速度に基づく Reynolds 数は 180 とする (バルク速度、チャンネル幅で定義される場合の Reynolds 数では約 5600 となる)。Smagorinsky 数は $C_s = 0.1$ とする。また比較する DNS データは Kim らのデータを用いる^[5]。

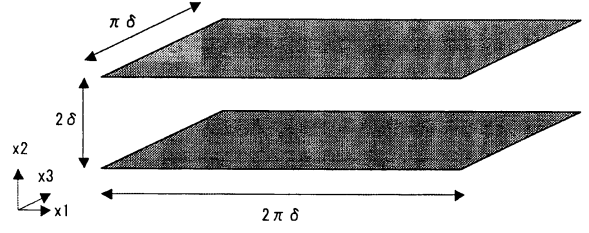


Fig. 1: Computational domain of channel turbulent flow

Table1 Finite Element Mesh

$E_1 \times E_2 \times E_3$	Δx_1^+	Δx_2^+	Δx_3^+
$32 \times 32 \times 32$	35.33	0.95 - 40.56	17.66
$64 \times 64 \times 64$	17.66	0.45 - 21.54	8.83

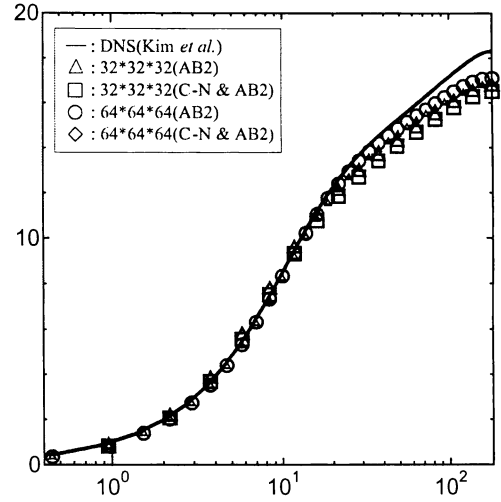


Fig. 2: Mean velocities at $Re_\tau = 180$

乱流統計量の算出は、粗いメッシュ (32) による充分発達した乱流場を求め、メッシュ分割の異なる場合の計算はデータの線形補間を行い、予備計算 (無次元時間で 15) を行った後、無次元時間 20 での乱流統計量を算出した。

図 2 に主流流速に対する時空間に関して平均化した結果を比較する。粘性低層内ではメッシュの解像度、Adams-Bashforth 法と Crank-Nicolson 法の違いはほとんど見られない。いずれの計算でも DNS の結果と良く一致していることが分かる。しかし平板間の中心付近での対数領域において流速がやや不足している結果となっており、メッシュが粗い場合はそれが顕著化している。差分法ではメッシュが粗い場合は流速が対数領域で大きい傾向を取るが、本計算では逆の傾向を示した。これは大島らの有限要素スキームを用いた場合でも見られた傾向である。

図 3 の主流方向の乱れ強度を示す。いずれのケースでもあまり大きな差異は見られないが、DNS と比較するとピーク値がやや小さい値となっている。また流れの状態が対数領域となる辺りでは、逆に乱れが過大評価されている。図 4 に垂直方向の乱れ強度を示している。主流方向の乱れ強度と同様に中心付近では乱れを過大評価している。また、メッシュの依存性が非常に強いことが分かる。2 つのスキームによる違いはほとんど見られないが、メッシュの違いによる差が大きいことがわかる。

図 5 にスパン方向の乱れ強度を示す。メッシュの依存性

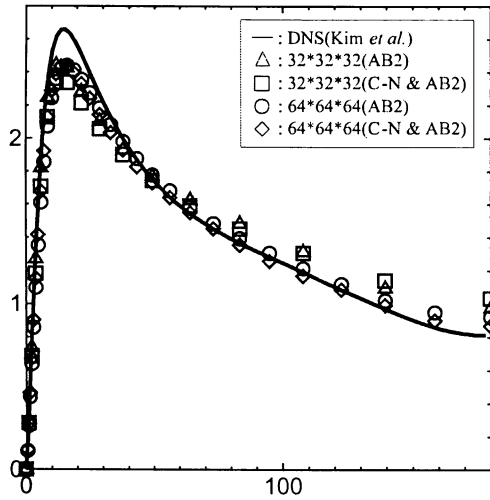


Fig. 3: Turbulent stresses $\bar{u}_{1rms}$

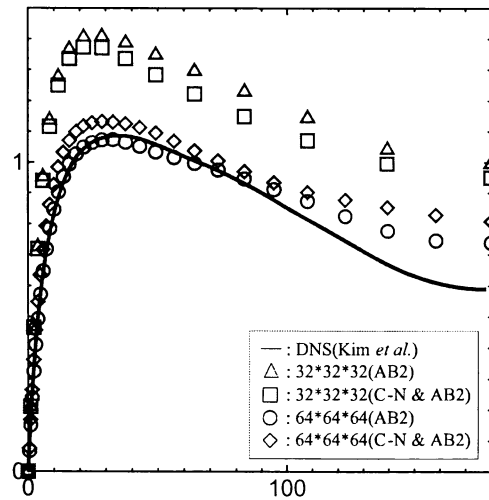


Fig. 5: Turbulent stresses $\bar{u}_{3rms}$

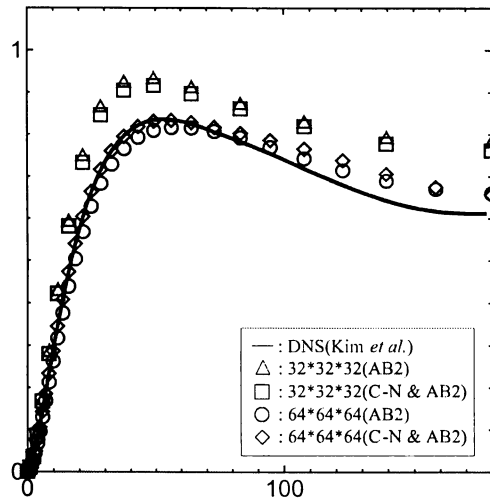


Fig. 4: Turbulent stresses $\bar{u}_{2rms}$

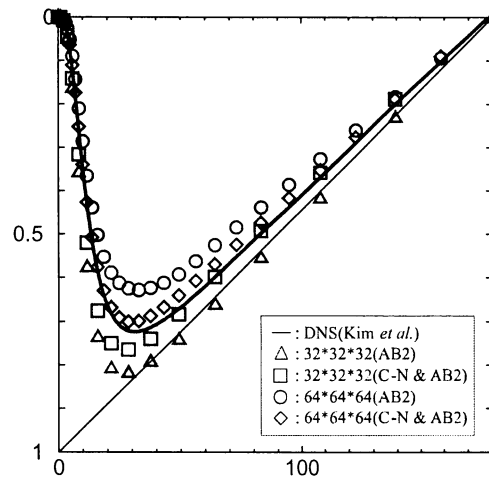


Fig. 6: Reynolds Stresses $\bar{u'_1 u'_2}$

は垂直成分のときよりもさらに大きな違いが見られた。特にスパン方向へのメッシュ解像度が必要であることが分かる。図4から図5を見ると、チャンネル中央付近においてはいずれの結果もDNSに比べて大きい値となっていることが分かる。すなわち、乱流強度がチャンネル中央付近においては過大評価され乱れ強度を大きく評価している。その結果、チャンネル中央付近での平均流速が過小評価されたと考えられる。

図6にレイノルズ応力の比較を示す。32×32×32での粗いメッシュにおけるAdams-Bashforth法による結果は、全せん断応力を示す直線よりも大きい値を示している。しかしCrank-Nicolson法やメッシュ分割を細かくしたものでは、DNSに比較的近い値となっている。特にCrank-Nicolson法を併用したレイノルズ応力の結果はDNSに近いことを示している。大島らが指摘しているように負の数値粘性が生じた場合、レイノルズ応力が全せん断応力となる直線から大きくなることもあるが、本計算においても粗いメッシュで陽的な計算を行った場合、そのような傾向が見られた。

図7に速度勾配テンソルの第2不変量 Q で表される渦の等数値面による結果を示す。速度勾配テンソルの第2不変

量は次式で表される。

$$Q = \frac{1}{2} (-S_{ij}S_{ij} + W_{ij}W_{ij}) \quad (10)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), W_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (11)$$

壁面付近での壁による速度勾配により強い渦が形成されている様子が分かる。 $Re_\tau = 180$ と比較的低レイノルズ数域での乱流場であるため、渦スケールがはっきり大きく捕らえられている。レイノルズ数が高くなるにつれ、渦スケールの微細化傾向になることが知られている。したがって、渦スケールの大きさに応じて計算領域を考慮する必要がある。

4. まとめ

壁乱流の基礎的な流れ場であるチャンネル乱流の計算を有限要素スキームにより解析した。本研究では2種類のメッシュと時間積分法に陽的解法であるAdam-Bashforth法及び、Crank-Nicolson法により検討した。これは壁乱流の特徴でもある壁面近傍での乱流境界層を的確に捉えるために十分なメッシュ解像度が必要となるため、それに伴う粘性支配による時間刻み幅の条件が著しく厳しいものとなるため、差分法でも良く用いられている陰解法の適用を行った。

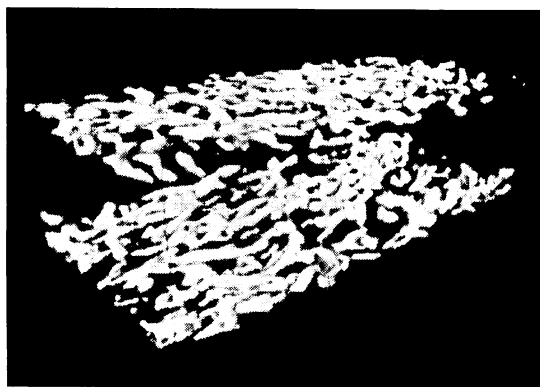


Fig. 7: Distribution of second invariant of velocity gradient tensor in channel turbulent flow ($Q = 150$, $Re_\tau = 180$).

その結果、時間刻み幅を約 2 倍程度大きく設定しても安定した計算が行え、計算時間においても有利なことが分かった。また計算結果の比較から、また粗いメッシュで Adamth-Bashforth 法を用いた場合は、大島らの結果と同様にレイノルズ応力が圧力勾配よりも大きくなる傾向を示した。しかし Crank-Nicolson 法を適用した場合は、そのような傾向にはならなかった。

一方、主流方向流速成分及び各方向の乱れ成分については、時間積分法による違いはほとんど見られなかった。細かい要素を用いた場合はレイノルズ応力が圧力勾配よりも大きくなることは無く、乱流強度についても主流方向における対数領域でのピーク値がやや小さく見積もられたが、垂直方向及びスパン方向では DNS とほぼ一致した結果が得られた。また主流方向の流れは、粗いメッシュを用いても粘性低層では良い一致が見られたが、対数領域（速度損失領域）において流速がやや小さいことが確認された。粗いメッシュを用いた場合、レイノルズ応力に関する比較で計算スキームによる違いが確認された。これまで有限要素法による計算は十分にメッシュ分割が行われている場合が少なく、その場合、レイノルズ応力の差異などは計算スキームに大きく依存しているものと考えられる。対流項の離散化方法の違いなどについての検討を本研究では行わなかったが、差分法で行われているように有限要素法についてもメッシュの依存性や運動量、エネルギー保存に基づくスキームの開発が必要であると考えられる。本計算では差分法と同程度の要素分割が行えれば、通常の Galerkin 型有限要素法でも $Re_\tau = 180$ 程度のチャネル乱流解析が行えることを示した。

本計算の一部に PC クラスタを用いた並列計算を行った。32*32*32 では単一 CPU でのシリアル計算の方が速かった。これは 1 ノードに掛かる粒度が小さく、通信負荷が計算負荷よりも相対的に大きくなったためである。単一計算で 32*32*32 の計算では 1 ステップあたり約 0.5[s] 程度である。一方、64*64*64 では並列化効果が得られたため、本計算で用いた。オーバーラップ領域を用いて圧力に関するポアソン方程式を解くには、シリアル計算とは異なるため反復回数が若干異なるが、計算データの差異はほとんど無いことを確認している。また、ポアソン方程式の反復の度にデータの交換が行われるため、今回用いた Crank-Nicolson 法よりも、Adamth-Bashforth 法を用いた解法の方が並列化効率という点では有利であった。また計算速度の点のみならず、乱流解析のような大規模な記憶容量を必要とする計算には PC クラスタを用いて、記憶容量の分散化を図ることが出来るという点で、大きな優位性も持っている。

参考文献

- (1) 大島まり, 小林敏雄, 谷口伸行, ラージ・エディ・シミュレーションの有限要素解析における運動量保存性の評価, 機論, 63-610, 1955-1960, 1997.
- (2) 槇原孝文, 棚橋隆彦, 発散型の対流項を用いた保存形有限要素スキーム, 機論, 68-666, 317-324, 2002.
- (3) T.J.R. Hughes, A.A. Oberai and L. Mazzei, Large Eddy Simulation of Turbulent Channel Flows by the Variational Multiscale Method, *Phys. Fluids*, 13-6, 1784-1799 (2001).
- (4) Moin, P. and Kim, J., Numerical investigation of turbulent channel flow, *J. Fluid Mech.*, 118, 341-377, 1982.
- (5) Smagorinsky, J. : General circulation experiments with the primitive equations. I. The basic experiment, *Mon. Weath. Rev.*, 91(1963), 99-165.
- (6) Deardorff, J. W. : A numerical study of three-dimensional of turbulent channel flow at large Reynolds numbers, *J. Fluid Mech.*, 41(1970), 453-480.
- (7) 郭陽, 加藤千幸, 山出吉伸, M. Ashraf UDDIN, ベンチマーク流れの有限要素法による LES 解析, 第 18 回数値流体力学シンポジウム, A7-3, 2003