

## プロジェクト3

### 複雑流れ現象の数値モデルと数値シミュレーション —流れ問題の数値計算スキームの構築—

登坂 宣好（数理情報工学科）

#### 1. はじめに

研究課題“流れ問題の数値計算スキームの構築”に対して、平成16年度に得られた研究成果を次の二つの研究テーマに関して報告する。

##### ① 高次補間スキームの構築

これまで構築してきた複雑な流れに対する高次補間多項式に基づく数値計算スキームの適用性を拡張する事を目的として、粘性流れだけではなく、それと熱伝導とが連成することによって生じる複雑な粘性流体の自然対流現象の解明への展開を行ってきた。その結果、一応の成果が得られた。

##### ② 移動境界流れ問題の近似計算スキームの構築

これまで移動境界を有する複雑な流れ問題の数値シミュレーションに対し、マーカー粒子法を用いた有限要素法による近似計算スキームを構築してきた。本年度の報告では、昨年度そのスキームとして提案したマーカー粒子有限要素法における流体の流れをより正確に表現できるように改良を行い、マーカー粒子の追跡精度をこれまでの1次精度から2次精度に向上させる事による成果の報告を行う。

#### 2. 高次補間スキームの構築

これまで高次補間多項式を用いた流れ問題に対する高精度かつ安定な数値計算スキームを構築してきた。そのスキームの適用性と有効性を検証するための研究を続けている。そのスキームによる2次元および3次元非圧縮粘性流れ問題に関する研究成果については、これまで詳しく報告してきた。

本研究報告では、構築してきた高次補間多項式を用いた流れの数値計算スキームの一つの新しい展開として、非圧縮粘性流体の熱伝導現象である自然対流現象の数値的解明を目指して行ってきた成果を具体的な数値シミュレーション結果を通して示す。

##### 2.1 3次元問題の高次補間近似スキーム

自然対流問題の数値モデルは、連続の方程式、ナビエ・ストークス方程式、エネルギー方程式によっ

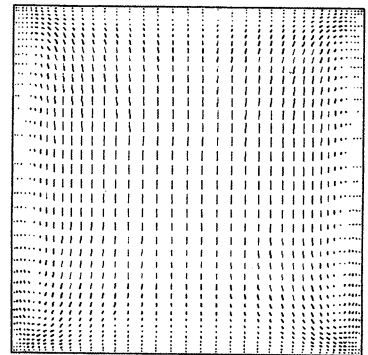
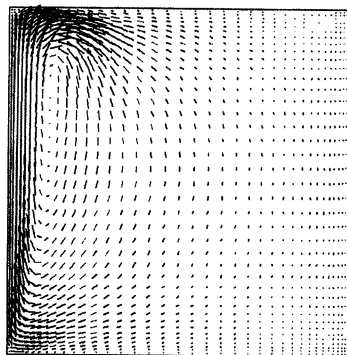
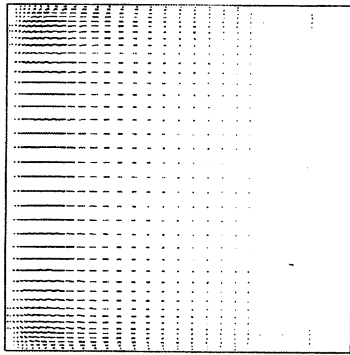
て構成される。これらの非線形偏微分方程式に含まれる未知関数は、流速成分( $u$ 、 $v$ 、 $w$ )、圧力( $p$ )、温度( $\theta$ )である。この未知関数の中で流速成分と温度とに関して高次補間多項式による近似を導入する事にする。その高次補間多項式による未知関数の近似表現は、非移流項と移流項とに分けて次のように与えるものとする。

##### ・ 非移流項に対する近似表現

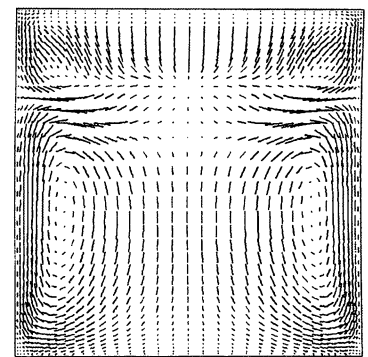
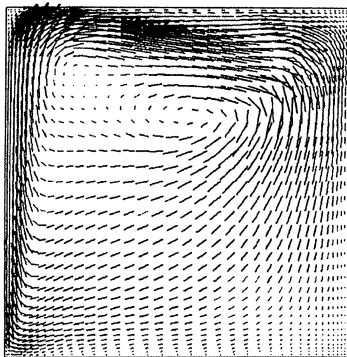
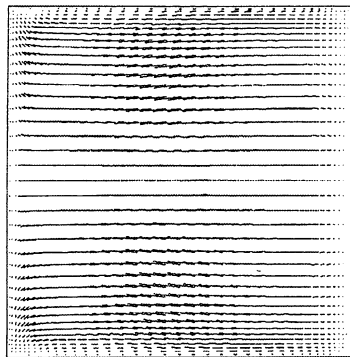
$$\begin{aligned} f(x, y, z) = & C_{000} + C_{100}x + C_{010}y + C_{001}z \\ & + C_{200}x^2 + C_{020}y^2 + C_{002}z^2 + C_{110}xy \\ & + C_{101}xz + C_{011}yz + C_{300}x^3 + C_{030}y^3 \\ & + C_{003}z^3 + C_{210}x^2y + C_{201}x^2z \\ & + C_{120}xy^2 + C_{021}y^2z + C_{102}xz^2 \\ & + C_{012}yz^2 + C_{111}xyz + C_{400}x^4 \\ & + C_{040}y^4 + C_{004}z^4 + C_{310}x^3y \\ & + C_{301}x^3z + C_{130}xy^3 + C_{031}y^3z \\ & + C_{103}xz^3 + C_{013}yz^3 + C_{211}x^2yz \\ & + C_{121}xy^2z + C_{112}xyz^2 + C_{500}x^5 \\ & + C_{050}y^5 + C_{005}z^5 + C_{410}x^4y \\ & + C_{401}x^4z + C_{140}xy^4 + C_{041}y^4z \\ & + C_{104}xz^4 + C_{014}yz^4 + C_{311}x^3yz \\ & + C_{131}xy^3z + C_{113}xyz^3 + C_{510}x^5y \\ & + C_{501}x^5z + C_{150}xy^5 + C_{051}y^5z \\ & + C_{105}xz^5 + C_{015}yz^5 + C_{411}x^4yz \\ & + C_{141}xy^4z + C_{114}xyz^4 + C_{511}x^5yz \\ & + C_{151}xy^5z + C_{115}xyz^5 \end{aligned} \quad (1)$$

##### ・ 移流項に対する近似表現

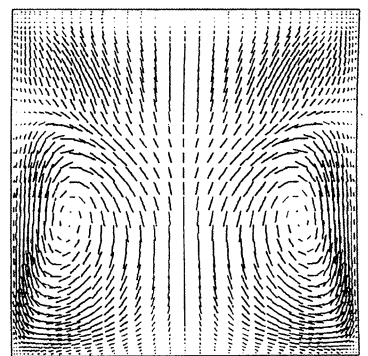
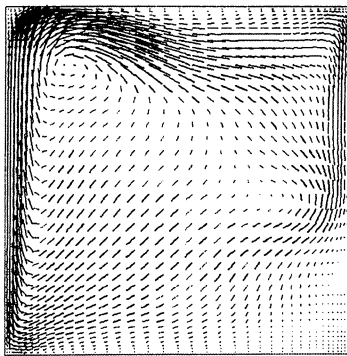
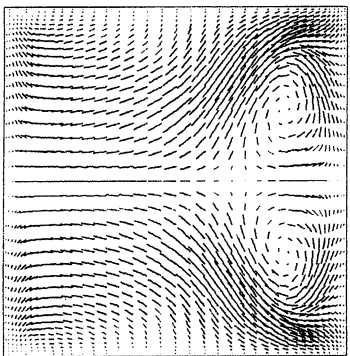
$$\begin{aligned} f(x, y, z) = & S_{000} + S_{100}x + S_{010}y + S_{001}z + S_{200}x^2 \\ & + S_{020}y^2 + S_{002}z^2 + S_{110}xy + S_{101}xz \\ & + S_{011}yz + S_{300}x^3 + S_{030}y^3 + S_{003}z^3 \\ & + S_{210}x^2y + S_{201}x^2z + S_{120}xy^2 + S_{021}y^2z \\ & + S_{102}xz^2 + S_{012}yz^2 + S_{111}xyz + S_{310}x^3y \\ & + S_{301}x^3z + S_{130}xy^3 + S_{031}y^3z + S_{103}xz^3 \\ & + S_{013}yz^3 + S_{211}x^2yz + S_{121}xy^2z + S_{112}xyz^2 \end{aligned} \quad (2)$$



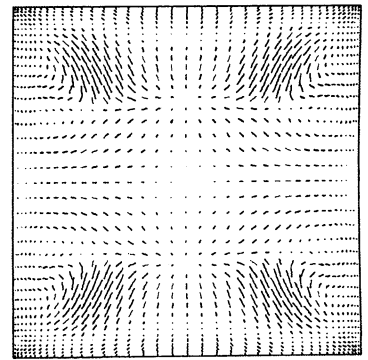
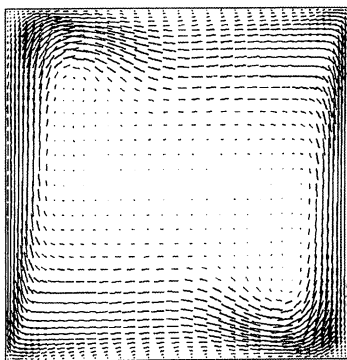
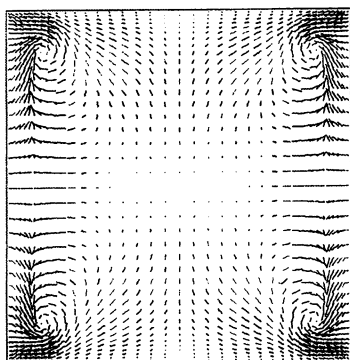
(a)  $t=2000$



(b)  $t=6000$

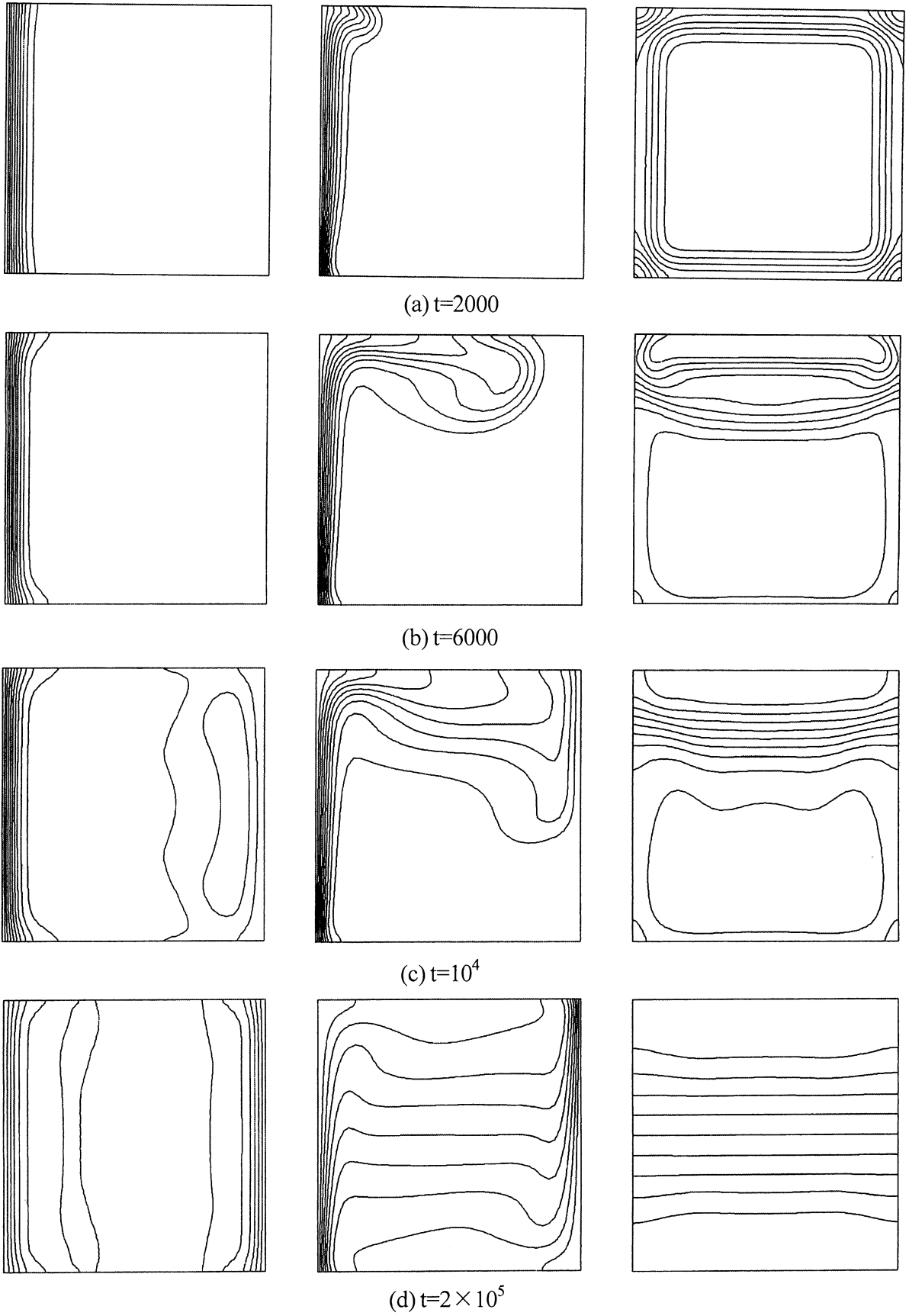


(c)  $t=10^4$



(d)  $t=2 \times 10^5$

Fig.1 Velocity vector fields (  $Ra = 10^6$  )



**Fig.2 Isothermal fields ( $Ra = 10^6$ )**

## 2.2 数値計算例

立体キャビティー（左右壁で温度指定条件、上下および前後壁で断熱条件）内で生じる自然対流現象の数値シミュレーション結果を示す。レーリー数 (Rayleigh Number)  $Ra=10^6$  とし、メッシュ数を  $41 \times 41 \times 41$  とした。

Fig.1は各時間ステップにおける流体の流速ベクトルを示し、Fig.2は各時間ステップにおける等温度線分布を示す。なお、各図はそれぞれ立方体の  $x \cdot y$  平面、 $x \cdot z$  平面、 $y \cdot z$  平面における各量を表示している。

## 3. 移動境界流れ問題の近似計算スキームの構築

自由表面を始めとして移動境界を有する流れ問題の近似計算スキームとして、時々刻々と変化する流れの数値シミュレーションにおいて流れを追跡するためにマーカー粒子を導入する手法が良く用いられている。このような手法では、何よりも流れを追跡するための計算精度を高める事が必要となる。これまでは、その追跡に対し、オイラー法による計算が行われその精度は1次精度であった。

そこで、本研究では、その計算精度を高めるスキームの改良を進めてきた。本報告では、計算精度を1次精度から2次精度に高めたスキームが出来たので、その計算スキームによる数値シミュレーション結果について具体例を通し、移動境界を有する流れがより正確に追跡できる容易になった事を示す。

### 3.1 近似計算スキームの改良

流体の流れを追跡するためにマーカー粒子を導入する。そのマーカー粒子の第  $n$  時刻ステップにおける流れ場における位置を  $\mathbf{x}^n$  とすると、次の第  $n+1$  時刻ステップにおける位置は流体の流速ベクトル  $\mathbf{u}^{n+1}$  を用いて、1次精度による表現では

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \Delta t \mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{x}^n) \quad (3)$$

となる。この近似表現に対し、今回のスキームの改良では、2次精度を有する次の表現を導入する。

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}^{n+1} &= \mathbf{x}^n + \Delta t \mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{x}^n) \\ \tilde{\mathbf{x}}^{n+1} &= \mathbf{x}^n + \Delta t \mathbf{u}^{n+1}(\bar{\mathbf{x}}^n) \\ \mathbf{x}^{n+1} &= \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{x}}^{n+1} + \tilde{\mathbf{x}}^{n+1}) \end{aligned} \quad (4)$$

## 3.2 数値計算例

改良した近似計算スキームの有効性を示すために具体的な液滴落下問題に対する数値シミュレーション結果を示す。

正方領域の3分の1の部分に液体（非圧縮粘性流体）が存在している所に上部から半径0.1の液滴がある初速度で落下し、下部の液体に衝突し沈降して行く際に液体の自由表面形状が変化して行く様子を以下のFig.3に示す。なお、液体全体には4951個のマーカー粒子を配置し、液体の運動をシミュレーションした。

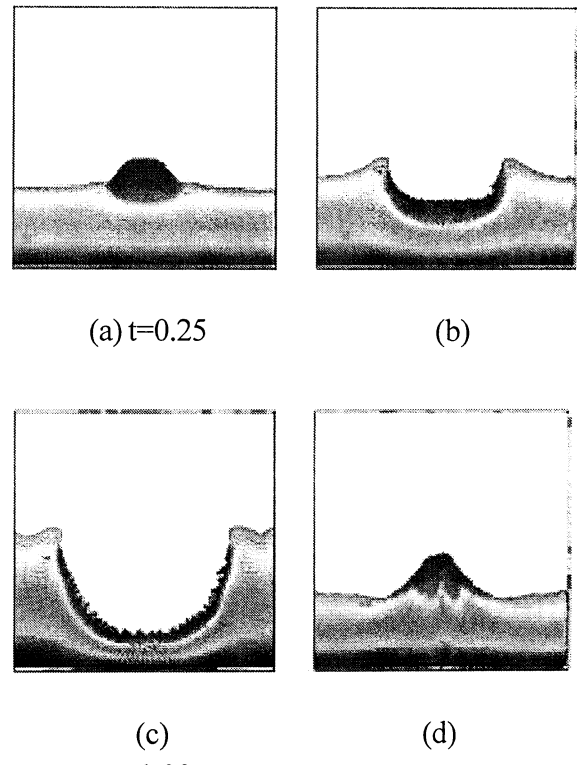


Fig.3 Liquid drop falling problem

### 参考文献

- 1) N.Tosaka & T.Akimoto, "Numerical Simulations of Three-Dimensional Natural Convection Phenomena by a Higher-Order Interpolation Scheme", Proceedings of the 4<sup>th</sup> International Conference on Engineering Computational Technology, (2004) Paper 87
- 2) 繁田岳美、登坂宣好、2次精度のマーカー粒子による自由表面流れの数値計算、第17回計算力学講演会講演論文集、(2004.11)、pp.397-39