

複雑流れ現象の数値シミュレーション

Numerical Simulations for Complex Flow Phenomena

角田 和彦 (数理情報工学科)

Summary

In this paper, we present a finite element scheme based on the Petrov-Galerkin method using exponential weighting functions for computing three-dimensional incompressible viscous flows involving complex flow phenomena. Numerical solutions for flow between two concentric cylinders, flows over a wall-mounted cube and around a circular cylinder are presented and compared with experimental data and other existing numerical data.

1. はじめに

流れ現象の数値モデルとして知られている Navier-Stokes 方程式によって支配されている粘性流体の非定常流れの現象を明らかにすることは、理工学の分野において重要な問題の一つである。特に、3次元性を有する高い Reynolds 数流れの問題を対象とする場合には乱流の解析に繋がる。この場合、Navier-Stokes 方程式に含まれる非線形の移流項が粘性項に比べて卓越することが特徴的なこととなる¹⁾。この特徴を考慮した近似解析スキームを開発しない限り、得られる数値解には擬似的な振動が現れることが知られている。この擬似振動を抑えるために、差分法、有限体積法及び有限要素法に基づく計算スキームには、種々の上流化手法が導入されてきた^{1),2),3)}。有限要素法の分野では、重み関数の中に上流の影響を取り入れることに基づく Petrov-Galerkin 法による定式化が注目を集めている³⁾。

著者は、これまで高 Reynolds 数粘性流れ問題を対象とした有限要素法の開発を目指し、指数関数を重み関数とした Petrov-Galerkin 法に基づく近似解析スキームの提案を行ってきた^{4),5)}。その定式化の際、非圧縮性 Navier-Stokes 方程式に対し、流速を陽的に圧力を陰的に扱う準陽的な立場の時間分離解法として fractional step 法による計算スキームを採用する。時間積分として移流項と拡散項の両方に対し2次精度の Adams-Bashforth 法を適用し、圧力に関するポアソン方程式の解法には SCG 法を用いている。また、その指数関数型重み関数は形状関数に基づいたものであるから多次元問題への拡張も容易であるという特徴も有する。

本論文では、3次元非圧縮粘性流れの現象を対象に、指数関数型 Petrov-Galerkin 有限要素スキーム⁵⁾による解析を示す。数値計算例は、内円筒が回転する同心二重円筒内流れ^{6),7)}、立方体周り^{8),9)} や円柱周り^{10),11)} の流れを対象とし、得られた数値結果を実験値等と比較し手法の妥当性を検討し、複雑な流れ現象の解明を図る。

2. 基礎微分方程式

3次元非圧縮粘性流れ場の解析対象領域を Ω 、その境界を Γ とする。また、 \mathfrak{S} は閉じた時間間隔を表す。その流れの現象を支配する Navier-Stokes 方程式及び連続の方程式に関する基礎微分方程式系は無次元形式で表現すれば次式となる。

$$\dot{u}_i + u_j u_{i,j} = -p_{,i} + \frac{1}{Re} u_{i,jj} \quad \text{in } \mathfrak{S} \times \Omega \quad (1)$$

$$u_{i,i} = 0 \quad \text{in } \mathfrak{S} \times \Omega \quad (2)$$

ただし、 u_i は速度ベクトル成分、 p は圧力、 Re は Reynolds 数を表す。

ここで、式 (1)、(2) に対し、fractional step 分解を導入すれば以下の方程式系を得る。

$$\dot{u}_i(\tilde{u}_i, u_i^n) + u_j u_{i,j} = \frac{1}{Re} u_{i,jj} \quad \text{in } \mathfrak{S} \times \Omega \quad (3)$$

$$\dot{u}_i(u_i^{n+1}, \bar{u}_i) = -p_{,i}, u_{i,i} = 0 \quad \text{in } \mathfrak{S} \times \Omega \quad (4)$$

ただし、 $\dot{u}_i(u_i^{n+1}, u_i^n) = \dot{u}_i(u_i^{n+1}, \bar{u}_i) + \dot{u}_i(\bar{u}_i, u_i^n)$ 、 \bar{u}_i は修正速度ベクトル成分、 n は時間ステップ数を表す。

3. 指数関数型 Petrov-Galerkin 有限要素解析

高い Reynolds 数域の流れの現象を Galerkin 型の有限要素法で解析すると要素分割数を多くしない限り、擬似的な振動を伴う数値解が得られることは知られている。そこで、高 Reynolds 数流れの解析に対しても安定した数値解を得るために、式 (3) に指数関数を重み関数とした Petrov-Galerkin 法に基づく有限要素スキーム⁵⁾を適用する。

式 (3) の重みつき積分表現に発散定理を適用し、幾らかの操作を施せば次の弱形式表現を得る。

$$\int_{\Omega_e} \{\dot{u}_i + u_j u_{i,j}\} M_\alpha d\Omega + \int_{\Omega_e} \frac{1}{Re} u_{i,j} N_{\alpha,j} d\Omega = \int_{\Gamma_e} \frac{1}{Re} u_{i,j} n_j N_\alpha d\Gamma \quad (5)$$

ただし、 Ω_e は全体領域 Ω の部分領域、 Γ_e はその境界、 n_j は外向き単位法線ベクトル成分を表す。また、 M_α は指数関数型の重み関数⁵⁾で次式となる。

$$\left. \begin{aligned} M_\alpha(x) &= \sum_{\gamma,i} N_\alpha(x) e^{-a_i(N_\gamma x_\gamma^2 - x_i^2)} \\ a_i &= \frac{\alpha_i}{|L_i|} \text{sgn}(v_i) \quad (i = 1 \sim 3) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ただし、 v_i 及び L_i は Ω_e 内で平均化された速度ベクトル及び代表長さをそれぞれ表し、 $\text{sgn}(\cdot)$ は符号関数である。また、 α_i は安定化パラメータを表している。

ここで、未知関数の要素内補間を行い、時間進行スキームとして 2 次精度の Adams-Bashforth 法を用いると次の有限要素方程式が得られる。

$$M_{\alpha\beta} \frac{\{\bar{u}_i\}_\beta - \{u_i^n\}_\beta}{\Delta t} = \frac{1}{2}(3F_{i\alpha}^n - F_{i\alpha}^{n-1}) \quad (7)$$

ただし、右辺の諸量は

$$F_{i\alpha}^n = -\{K_{\alpha\beta}(u_j^n) + \frac{1}{Re} D_{\alpha\beta}\} \{u_i^n\}_\beta + f_{i\alpha}^n \quad (8)$$

で表され、各行列及びベクトルは次式で定義される。

$$\left. \begin{aligned} M_{\alpha\beta} &= \int_{\Omega_e} M_\alpha N_\beta d\Omega \\ K_{\alpha\beta}(u_j^n) &= \int_{\Omega_e} M_\alpha u_j^n N_{\beta,j} d\Omega \\ D_{\alpha\beta} &= \int_{\Omega_e} \frac{1}{Re} N_{\alpha,j} N_{\beta,j} d\Omega \\ f_{i\alpha}^n &= \int_{\Gamma_e} \tau_i^n N_\alpha d\Gamma \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

4. 数値計算例

上述で展開してきた指数関数型 Petrov-Galerkin 有限要素スキームを用い、3次元非圧縮粘性流れの代表的な問題である回転同心二重円筒内流れ、立方体周り流れ、及び円柱周りの流れの3種類の数値計算例を通して解析手法の妥当性及び適用性を検討する。なお、計算を実行するに当たり、初期条件は領域内の全ての点で速度を零とした。速度ベクトル及び修正速度ポテンシャルは一次要素、圧力には要素内一定の要素を用いた。

4.1 回転同心二重円筒内流れ^{6),7)}

内円筒が回転する同心二重円筒内流れの問題に対し、種々の Reynolds 数に関する計算例を示す。Fig.1(a) に計算領域及び境界条件を示す。図中で $R_1 = 0.5$ 、 $R_2 = 0.7$ 、 $L = 2.0$ としている。軸方向の流れに関しては周期境界条件を課している。圧力の基準値を設定するために外円筒の軸中央の4点に $p = 0$ の Dirichlet 条件を与えている。また、有限要素メッシュは Fig.1(b) に示され、計算を実行するにあたり用いたパラメータを Table 1 に示す。Reynolds 数の計算には、代表長として内外円筒間隔 ($R_2 - R_1$) 及び代表速度として瞬時の内円筒周速度を用いている。

Fig.2 は、種々の Reynolds 数に関する圧力場を示す。 $Re = 200$ では軸方向に周期性のある流れ (テイラー渦) が現れている。さらに、高い Reynolds 数では、周期性の見られない複雑な流れパターンが観察される。また、 $Re = 2000$ での軸方向の流れに“うねり”の存在があることも分かる。

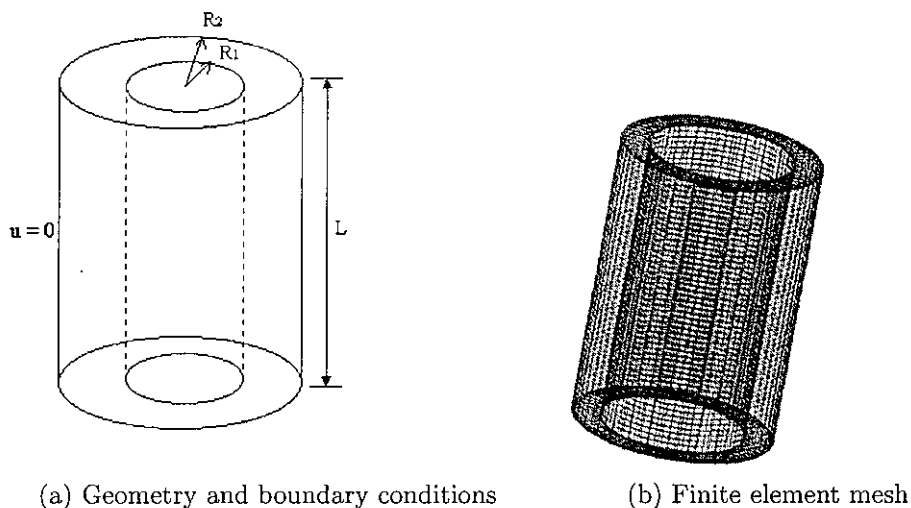


Figure 1: Flow between two concentric cylinders

Table 1 A summary of the parameters

Nodes	Elements	Minimum length	Δt	$\alpha_i (i = 1 \sim 3)$
55,488	51,200	0.003369	0.005	0.1

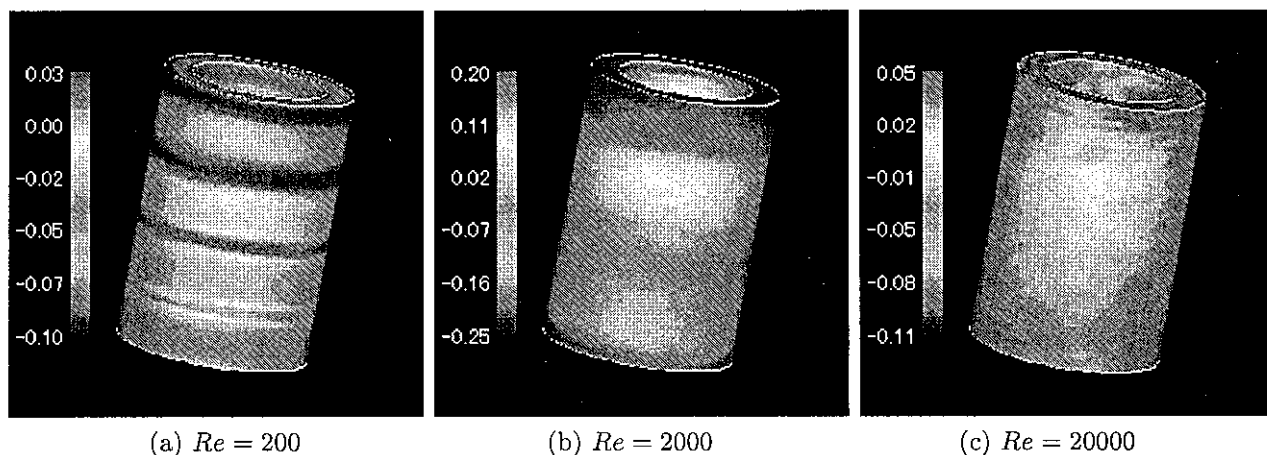


Figure 2: Instantaneous pressure fields

4.2 立方体周りの流れ^{8),9)}

立方体周り流れの問題に対し、Reynolds 数 $Re = 400, 10^5$ に関する計算例を示す。Fig.3(a) に計算領域及び境界条件を示す。計算に用いた有限要素メッシュは Fig.3(b) に示される。また、計算を実行するにあたり用いたパラメータを Table 2 に示す。

Fig.4 は、立方体前方、及び上面から見た流線を示す。低い Reynolds 数域では、立方体前方に対称的な螺旋状の馬蹄渦が形成されることが確認される⁸⁾。一方、 $Re = 10^5$ という高 Reynolds 数域での結果は、非対称的な馬蹄渦が形成され、立方体後流域には複雑な渦の挙動が現れている。立方体前面、側面、及び背面の異なる高さでの圧力係数 C_p の結果をそれぞれ Fig.5(a)-(d) に示し、実験値⁹⁾ との比較も行っている。前面及び背面の結果は実験値との一致が見られるが、側面の値については異なり今後検討する必要がある。

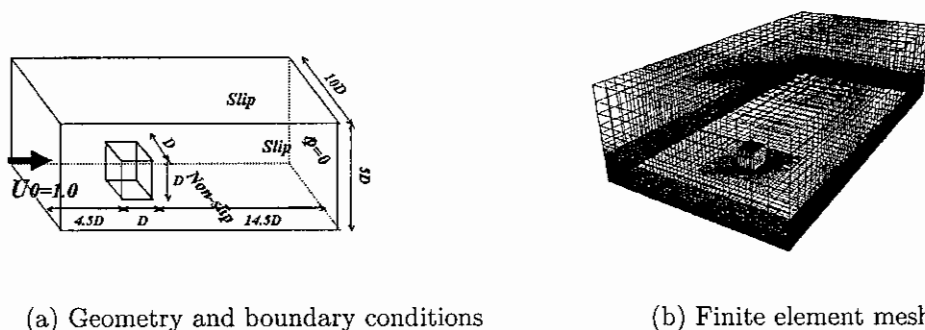


Figure 3: Flow over a wall-mounted cube

Table 2 A summary of the parameters

Nodes	Elements	Minimum length	Δt	$\alpha_i (i = 1 \sim 3)$
100,446	94,000	0.05	0.005	0.2

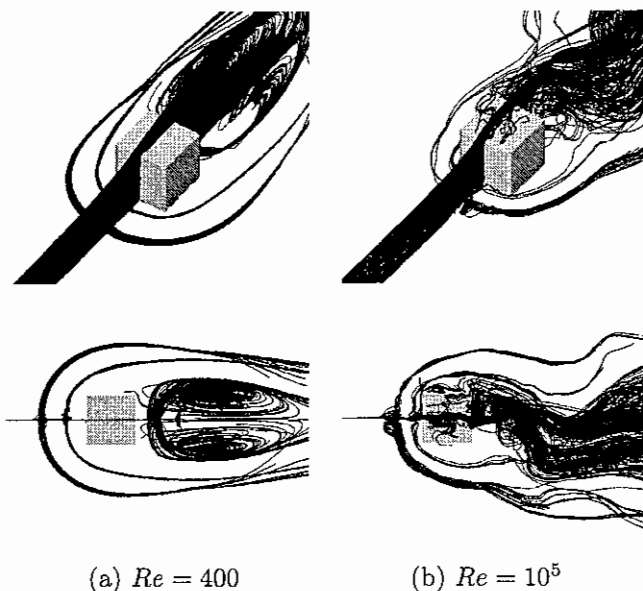


Figure 4: Instantaneous streamlines

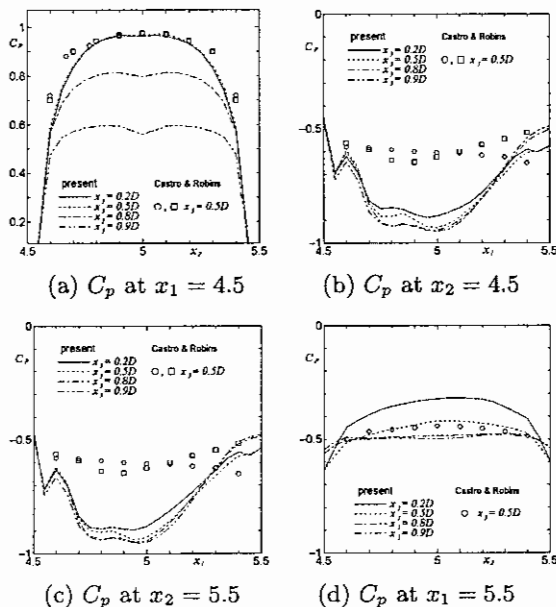


Figure 5: Pressure coefficients on the cube

4.3 円柱周りの流れ^{10),11)}

円柱周り流れの問題に対し、種々の Reynolds 数に関する計算例を示す。Fig.6(a) に計算領域及び境界条件を示す。円柱周り近傍の有限要素メッシュは Fig.6(b) に示される。また、計算を実行するにあたり用いたパラメータを Table 3 に示す。

Fig.7 は異なる Reynolds 数での流線、及び対応している圧力場を表している。 $Re = 5 \times 10^5$ では、円柱上の流れの剥離位置が後方に移動している。その結果として、 $Re = 10^4$ の場合よりも後流域での wake の幅が狭くなっていることが分かる。Fig.8 で、種々の Reynolds 数に関するストローハル数 S_t 、及び平均化された抗力係数 \bar{C}_D が示され、実験値¹⁰⁾や他の数値解¹¹⁾と比較されている。ストローハル数の結果は実験値と比較しても良い結果が得られ、また、 $Re = 5 \times 10^5$ で幾つかの振動数が現れている。抗力係数の場合も他の結果と比較して満足な結果が得られている。

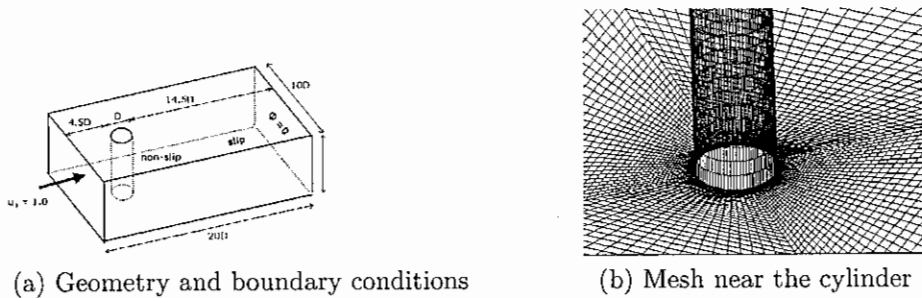


Figure 6: Flow around a circular cylinder

Table 3 A summary of the parameters

Nodes	Elements	Minimum length	Δt	$\alpha_i (i = 1 \sim 3)$
130,830	122,000	0.0029	0.0025	0.5

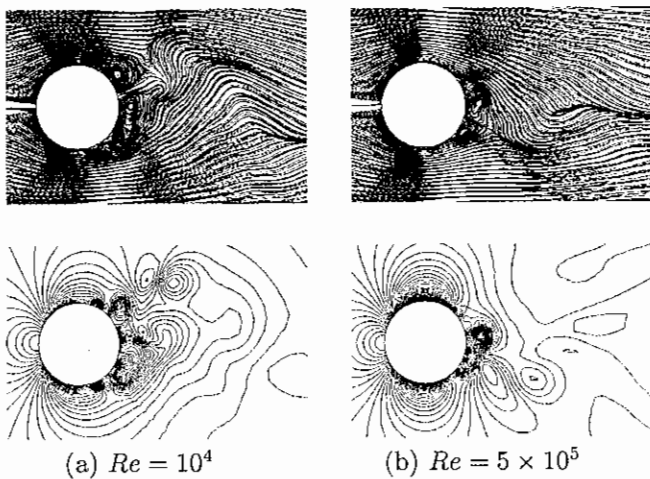


Figure 7: Streamlines and pressure fields

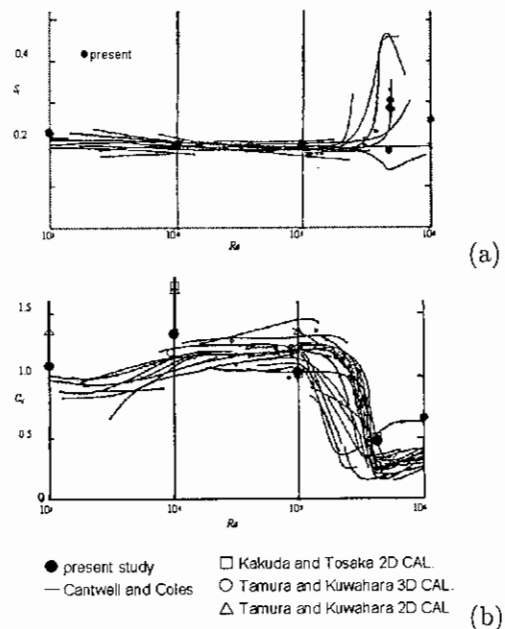


Figure 8: (a) Strouhal numbers. (b) Time-averaged drag coefficients.

5. おわりに

3次元非圧縮性粘性流れの現象に対し、指数関数型 Petrov-Galerkin 有限要素法による解析を展開し、具体的な数値計算例を示してきた。その際、移流項及び拡散項に対し2次精度の Adams-Bashforth 法を適用し、時間進行に関する高精度化を図り、圧力に関するポアソン方程式の解法には SCG 法を採用し計算の高速化を図った。

回転同心二重円筒内流れ、立方体周り流れ、及び円柱周りの流れの数値計算例を通し、前年度報告した内容に追加して幾つかのことが分かった。

(1) 回転同心二重円筒内流れの問題について、低いレイノルズ数において2次元的な定常流れが現れ、Reynolds 数の増加に伴い、3次元性を有する周期的な非定常流れ、及び複雑な流れの挙動が得られた。特に、Reynolds 数 200 での軸方向流れに周期的に変動するテイラー渦が現れ、実験によって観察されている結果とも一致を見た。また、Reynolds 数 2000 での流れに”うねり”の存在を確認することができた。

(2) 立方体周りの流れの問題について、低い Reynolds 数 400 では対称的な螺旋状の馬蹄渦が立方体前方に現れ、立方体後方には対称的な渦領域が存在することが確認された。さらに高い Reynolds 数 10^5 では非対称的な螺旋状の馬蹄渦が現れ、立方体後方の流れは複雑な挙動が得られた。また、 $Re = 10^5$ に関する立方体前面、側面、及び背面の異なる高さでの圧力係数の結果を実験値と比較し、前面及び背面の結果は実験値との一致が見られたが、側面の値については異なった。その原因については今後検討する必要がある。

(3) 円柱周りの流れの問題について、広範囲な Reynolds 数域のシミュレーションが示された。円柱上の平均圧力分布、抗力係数、及びストローハル数に関して実験値や他解法の結果との比較をし、2次元計算よりも良好な結果を得た。また、流れの剥離位置は Reynolds 数が増加するのに伴い、円柱上の後方に移動することが確認できた。その結果として、 $Re = 10^4$ の場合よりも後流域での wake の幅が狭くなり、このことが、 $Re = 5 \times 10^5$ あたりでの抗力係数の低下に影響することが分かった。また、この Reynolds 数領域では、数種のストローハル数が現れることが確認できた。

参考文献

- 1) R. Peyret and T.D. Taylor, "Computational Methods for Fluid Flow", Springer-Verlag, New York (1983).
- 2) C.A.J. Fletcher, "Computational Techniques for Fluid Dynamics", Vols.I, II, Springer-Verlag, Tokyo (1991).
- 3) O. Pironneau, "Finite Element Methods for Fluids", John Wiley & Sons, New York (1989).
- 4) K. Kakuda and N. Tosaka, "Finite Element Approach for High Reynolds Number Flows", *Theoretical and Applied Mechanics*, **41**, (1992) pp.223-232.
- 5) K. Kakuda, N. Tosaka and T. Nakamura, "Finite Element Analysis for 3-D High Reynolds Number Flows", *Int. J. Comp. Fluid Dyn.*, **7**, (1996) pp.163-178.
- 6) T.B. Benjamin, "Bifurcation Phenomena in Steady Flows of a Viscous Fluid II. Experiments", *Proc. R. Soc. Lond., A*, **359**, (1978) pp.27-43.
- 7) K.A. Cliffe, "Numerical Calculations of the Primary-Flow Exchange Process in the Taylor Problem", *J. Fluid Mech.*, **197**, (1988) pp.57-79.
- 8) J.H. Ferziger and M. Perić, "Computational Methods for Fluid Dynamics", Springer, Tokyo (1997).
- 9) I.P. Castro and A.G. Robins, "The Flow around a Surface-Mounted Cube in Uniform and Turbulent Streams", *J. Fluid Mech.* **79**, part 2, (1977), pp.307-335.
- 10) B. Cantwell and D. Coles, "A Experimental Study of Entrainment and Transport in the Turbulent near Wake of a Circular Cylinder", *J. Fluid Mech.* **136**, (1983) pp.321-374.
- 11) T. Tamura and K. Kuwahara, "Direct Finite Difference Computation of Turbulent Flow around a Circular Cylinder", *Num. Meths. in Fluid Dyn.* **2**, (Eds., Yasuhara, M., et al.), (1989) pp.645-650.