プロジェクト3

複雑流れ現象の数理モデルと数値シミュレーションに関する研究

登 坂　宣 好（数理情報工学科）

1. はじめに

理工学の分野に見られる複雑流れ現象は多岐にわたっている．その“複雑流れ現象”を特に数値的に解明するための基礎的な研究を12年度から推進させ，本年度に新しい研究成果を発表することが出来た．

本年度に得られた研究成果は，主として流れの連続体モデルに対する数値計算スキームとしての高次補間差分スキームの開発と，流れの離散体モデルに対する格子ボルツマン法の適用である．その他に，平行せん断流の安定解析，流体・構造物連成解析，及び電磁流体力学の基礎となる電磁場の解析も行って来た．

2. 流れの数値計算スキームの構築

2.1. 離散体モデルと格子ボルツマン法

従来，流体の解析は流体を連続体としてモデル化したとき与えられるナビェ・ストークス方程式と連続の方程式とを適当な数値計算手法を用いて数値シミュレーションを行うことであった．しかし最近では，流体の運動を粒子の集合と見なし離散体としたモデルが行われ，その立場からの解析手法として格子ボルツマン法が進展している．

本年度は，格子ボルツマン法の適用性を検証するための研究として，特に前節で取り上げた2次元キャビティ流れ問題に対する数値シミュレーションを行い，連続体モデルによる数値結果との比較検討をした．以下にRe＝3200の場合の数値例を示す．

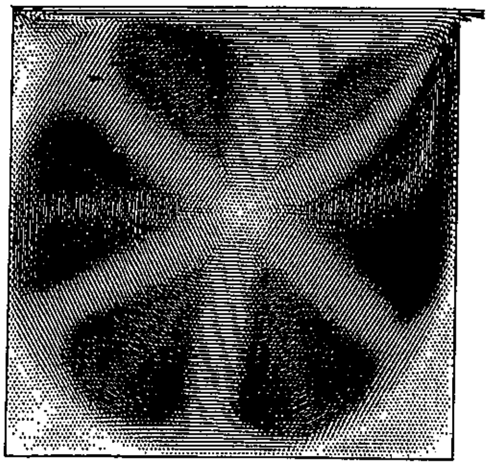


Fig.　Velocity vector field

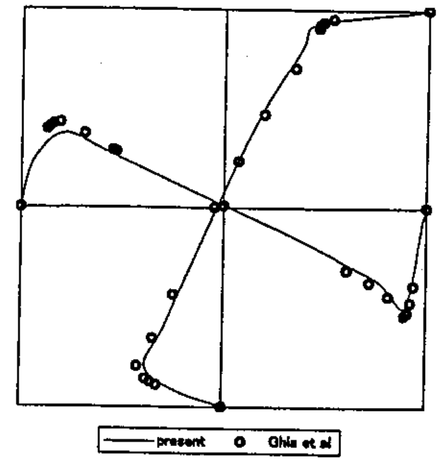
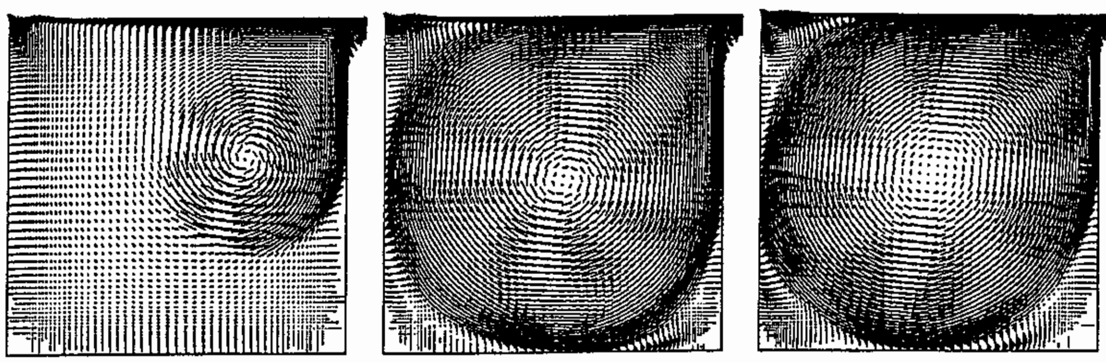


Fig.　Velocity distributions

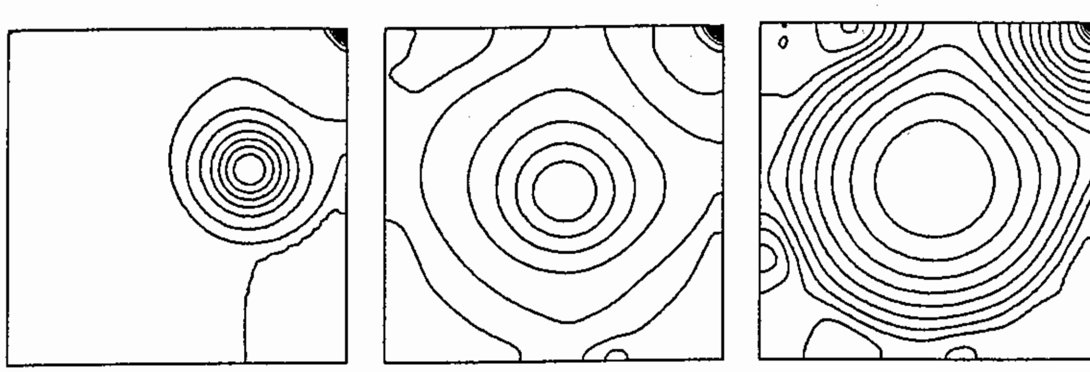
2.2. 連続体モデルと高次補間差分スキーム

流れ現象を数値的に解明するためには，現象論的に物体すなわち流体の運動に対する数値モデルが必要となる．本節では，流体を連続体として捉え，その数理モデルであるナビエ・ストークス方程式と連続の方程式とによって与えられる連立非線形偏微分方程式の初期値・境界値問題を近似的に解くための新しい計算スキームを以下に述べる．

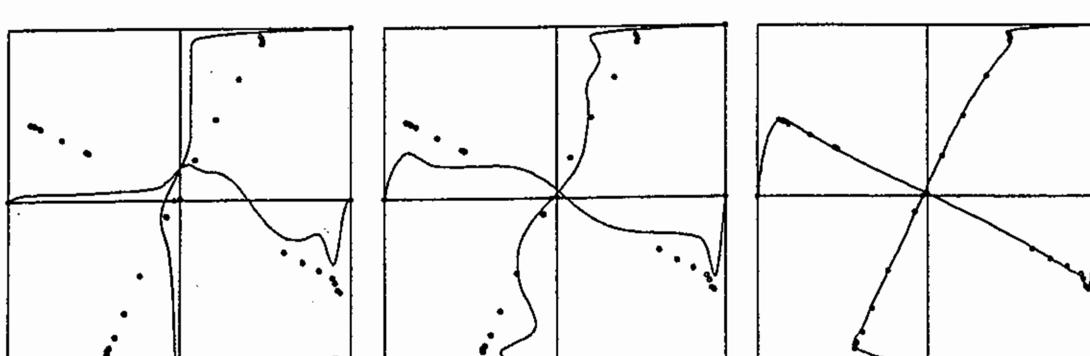
計算スキームとして，高次多項式を用いて流速成分を補間する差分スキームを新たに構築し，2 次元および 3 次元のベンチマークテスト（キャビティ流れ問題）を行い，良好な結果を得た．その一例として，本手法による 2 次元キャビティ流れ問題（$Re = 10^3, 5\cdot10^3, 10^4$）の各解析結果とその比較を以下に示す．



left: t=10.0 center: t=30.0 right: t=1200.0
Fig.. Velocity vector field



left: t=10.0 center: t=30.0 right: t=1200.0
Fig. Pressure field



left: t=10.0 center: t=30.0 right: t=1200.0
Fig. Velocity for the center of cavity

3. 複雑流れ現象の数値シミュレーション

3.1. 平行せん断流れの安定解析

鉛直方向に温度勾配を有する 2 次元せん断流れにおいて，Rayleigh 数が臨界 Rayleigh 数を超えると，外部からの擾乱に対し流れが不安定となる．さらに，主流がせん断流であるため，擾乱の方向によっては臨界 Rayleigh 数が異なる．

このような複雑な流れの不安定現象に対し，領域分割型境界要素法を適用し，Rayleigh 数が 100 の場合のせん断流の安定・不安定挙動を明らかにした．

3.2. 流体・構造物の連成解析

海洋開発に伴い，海上空港等の大型浮遊式海洋構造物が提案されるのみならず，構築されるようになって来た．このような状況に対し，構造物に作用する流体力を精密に算定することが必要となり，流体と構造物とが成す連成解析を行わなければならない．

この複雑な連成問題解析に対し，構造物の動的挙動を把握するための連成固有値解析を行って来た．まず大型浮遊式構造物を弾性梁，それを取り巻く流体を完全流体とそれぞれモデル化することによって連成系を構築した．弾性梁は有限要素法，一方流体は境界要素法により離散化する，いわゆる有限要素・境界要素結合解法を採用し，高次モードまでの連成運動を明らかにした．

3.3. 電磁場の解析

鞍点型の変分原理に対する混合型有限要素法の適用は，数値流体力学への適用や，電磁流体力学を初めとする電磁気以外の物理工学の各種鞍点問題に対する計算力学の基盤研究として極めて重要であるばかりでなく，電磁波を用いる最近の高精度・高感度通信と制御の基礎理論として重要と考えられる．特に，非圧縮性流体や電磁場の問題は，ソレノイダルな未知の流速ベクトルや磁場ベクトルに関して，鞍点型の変分原理により直接に定式化されるために，混合型有限要素法による数値解法が適しているといわれる．有限要素として辺要素を用いるが，3 角形辺要素を用いた数値解が真の解に収束することは，理論および数値実験によって実証されている．

静磁場問題に対する未知の磁場は，定常非圧縮性完全流体に対する未知の流速と解釈できる．さらに，電磁流体力学の数値計算の観点からも，静磁場問題の数値解法は数値流体力学に対する大切な基礎研究の一つと考えられる．

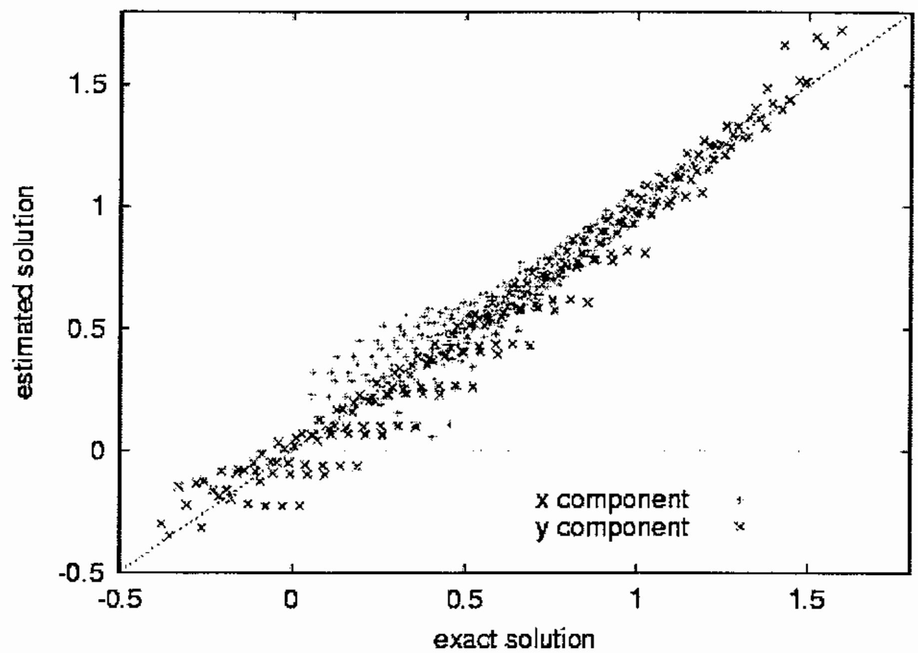
実際の状況においては，問題が一意かつ安定に解けるだけ十分な情報が得られることは本来稀である．そのため静磁場問題に限っても，従来の問題設定の枠組みからはずれた逆問題として自然に定式化されることになる．

そこで，静磁場問題として，対象とする領域の境界の一部における既知の境界条件から，残りの境界における未知の境界条件の同定，ならびに領域内部における磁場を求めることを考える．この問題は境界値逆問題の一つと見なすことができる．この境界値同定逆問題の数値解法を考える．

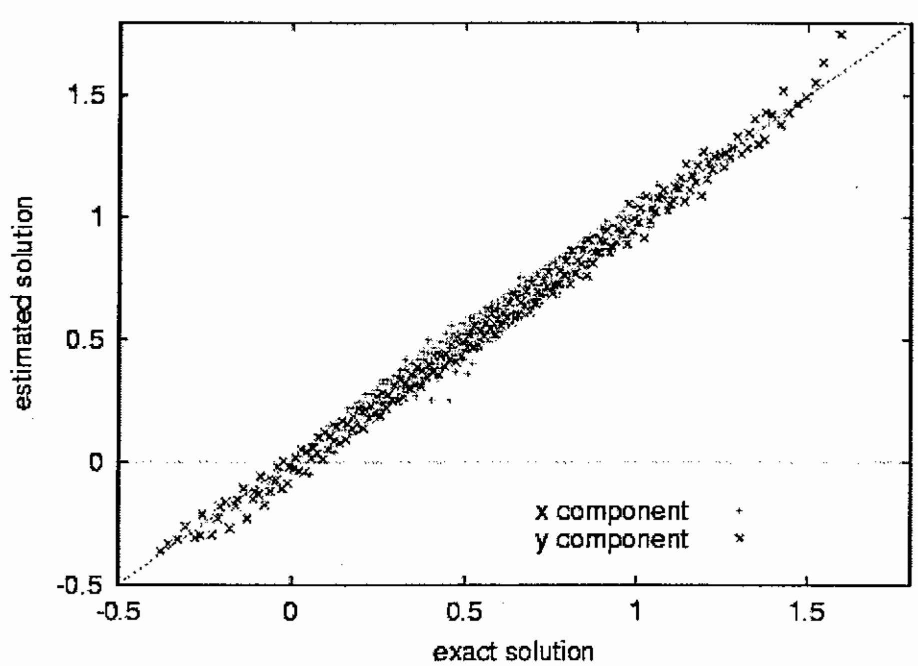
本逆問題を最小二乗法に基づいて定義された変分問題として捉えることで，順問題の反復解法に帰着させる手法を考案した．順問題に帰着させることで，有限要素法を本手法に利用できる．また，順問題を解いているため，本手法は安定である．従来の偏微分方程式の数値解法を，本逆問題には直接適用できないが，提案した手法を介すことにより，間接的に適用できる．

提案された手法に対する数値実験の結果，境界の広範囲に境界データを課せば良好な数値結果を得ること

が確認された．境界データを課す範囲が狭い場合でも，境界条件の与えられた境界付近の領域においては，真の解に近い数値解が得られることがわかった．さらに，与えられた境界データが誤差を含む場合を取り扱った．この場合には，正則化項を付加した目的汎関数を考え，境界値が誤差を含まない場合と同様の定式化により，アルゴリズムを構成することができる．数値実験で正則化パラメータを調節することにより，ある程度良好な解が得られることを確認できた．既知の境界データに相対誤差 10%を混入させ，正則化パラメータを$\eta=0,0.1$としたときの真の解と数値解との誤差分布図を以下にそれぞれ示す．



$\eta=0$



$\eta=0.1$