研究ノート

日本大学生産工学部研究報告A
2014 年 12 月 第 47 巻 第 2 号

周期離散戸田方程式のローラン性について

間田　潤*

Laurent Property of the Discrete Periodic Toda Equation

*Jun MADA**

The Laurent property is the property of a discrete equation that the denominator of its solution is a monomial of given initial values. Choosing non-zero initial values, we can avoid singularities of the equation with the Laurent property. Hence the Laurent property is important to investigate discrete equations over finite fields. By numerical calculation, we conjecture that the discrete periodic Toda equation has the Laurent property.

Keywords: Discrete Integrable Systems, Laurent Property, Discrete Periodic Toda Equation

1．序論

ローラン性とは，離散方程式の従属変数を初期値で表したとき，現れる有理式の分母が係数 1 の初期値の単項式になるという性質である。例えば，Somos 4 と呼ばれる方程式

$$x_{n+4}=\frac{x_{n+1}x_{n+3}+(x_{n+2})^2}{x_n} \tag{1}$$

を考える。初期値 x_1，x_2，x_3，x_4 に対して，x_5，x_6，x_7，x_8 は (1) の形から，明らかにローラン性を保つが，x_9 を求める際に

$$x_5=\frac{x_2x_4+x_3^2}{x_1}$$

が分母に表れるためにローラン性が明らかではなくなる。しかし，x_9 を具体的に求めると（分子は煩雑なので省略するが），

$$x_9=\frac{x_6x_8+x_7^2}{x_5}=\frac{(x_1,\,x_2,\,x_3,\,x_4\text{ の多項式})}{x_1^3x_2^3x_3^2x_4}$$

となり，ローラン性を保つことが確認できる。一般の x_n でもローラン性を持つことは，Fomin と Zelevinsky により示されている[1)]。

このローラン性は，我々が遂行している有限体上での離散方程式の研究[2)3)]において重要な役割を果たす。なぜなら，有限体上で考えることにすると，

$$ap\equiv 0 \bmod p$$

の計算から 0 になる点が頻繁に登場し，これらの点が分母に出てしまうと，そこから先の計算がストップしてしまうという問題点に直面することになるが，対象とする離散方程式が，先ほどのローラン性を持つのであれば，初期値として mod$p$ で 0 にならないものを選んでしまえば，この問題（分母が 0 になる）が解消できるからである。

そして，広田・三輪方程式およびそのリダクションとして得られる方程式（離散戸田方程式，離散 KdV 方程式，Somos 4 などの双線形方程式）がすべてローラン性を持つことについては，間瀬氏により示されている[4)]。間瀬氏は，ローラン性と可積分性との関わりとして，可積

* 日本大学生産工学部教養・基礎科学系准教授

分判定で主に使われている「特異点閉じ込め」との類似性についても論じており，この点でも離散可積分性において，ローラン性が重要であることが分かる。

本稿では，先ほど挙げた中の「離散戸田方程式[5]」に，さらに周期境界条件を課した周期離散戸田方程式について議論を行う。なお，周期境界条件とは，例えば数列 x_1, x_2, …, x_N, …に対する $x_{n+N}=x_n$ の条件（添字が N ずれるごとに同じ値が現れる）であり，これにより端点が無くなり，それだけ考察が難しくなる。

2．周期離散戸田方程式

周期離散戸田方程式は，

$$I_n^{t+1}=I_n^t+V_n^t-V_{n-1}^{t+1}, \tag{2}$$

$$V_n^{t+1}=\frac{I_{n+1}^t V_n^t}{I_n^{t+1}} \tag{3}$$

の n, t を独立変数とする I_n^t, V_n^t の離散方程式に，

$$I_{n+N}^t=I_n^t,\quad V_{n+N}^t=V_n^t$$

の n に対する周期境界条件を課したものである。

この周期離散戸田方程式は，τ 関数を用いて，双線形方程式

$$\tau_n^{t+1}\tau_n^{t-1}=\tau_{n-1}^{t+1}\tau_{n+1}^{t-1}+(\tau_n^t)^2 \tag{4}$$

として表すこともできる。ここで，周期境界条件を単純な $\tau_{n+N}^t=\tau_n^t$ ではなく，

$$\tau_{n+N}^t=K\lambda^t\mu^n\tau_n^t \tag{5}$$

で与えることにする。ただし，

$$\begin{aligned}K:&=\prod_{i=1}^N(V_i^0 I_i^0)^{N-i}\\&=(V_1^0 I_1^0)^{N-1}(V_2^0 I_2^0)^{N-2}\cdots(V_{N-1}^0 I_{N-1}^0)^1\\ \mu:&=\prod_{i=1}^N V_i^0 I_i^0,\ \lambda:=\prod_{i=1}^N I_i^0\end{aligned}$$

とする。また，初期条件として，

$$\tau_0^0=\tau_1^0=\tau_0^1=1$$

および

$$\tau_n^0=(V_1^0 I_1^0)^{n-1}(V_2^0 I_2^0)^{n-2}\cdots(V_{n-1}^0 I_{n-1}^0)^1\quad(n\geq 2)$$

$$\tau_n^1=(I_1^0 I_2^0\cdots I_n^0)\tau_n^0\quad(n\geq 1)$$

とおくことにすると，次の定理が成り立つ。

定理 1

$$\tau_n^{t+1}=\frac{\tau_{n+1}^{t-1}}{\dfrac{\lambda^2}{\mu}-1}\sum_{k=1}^N\frac{(\tau_{k+n}^t)^2}{\tau_{k+n}^{t-1}\tau_{k+n+1}^{t-1}} \tag{6}$$

で与えられる τ 関数は，境界条件 (5) を満たす方程式 (4) の解であり，

$$I_n^t=\frac{\tau_{n-1}^t\tau_n^{t+1}}{\tau_n^t\tau_{n-1}^{t+1}},\quad V_n^t=\frac{\tau_{n+1}^t\tau_{n-1}^{t+1}}{\tau_n^t\tau_n^{t+1}} \tag{7}$$

により，初期条件も含めて周期戸田方程式の解を与える。

【証明】 まず，(6) より，

$$\begin{aligned}\tau_{n+N}^t&=\frac{\tau_{n+N+1}^{t-2}}{\dfrac{\lambda^2}{\mu}-1}\sum_{k=1}^N\frac{(\tau_{k+n+N}^{t-1})^2}{\tau_{k+n+N}^{t-2}\tau_{k+n+N+1}^{t-2}}\\&=\frac{K\lambda^{t-2}\mu^{n+1}\tau_{n+1}^{t-2}}{\dfrac{\lambda^2}{\mu}-1}\\&\quad\sum_{k=1}^N\frac{(K\lambda^{t-1}\mu^{k+n}\tau_{k+n}^{t-1})^2}{K\lambda^{t-2}\mu^{k+n}\tau_{k+n}^{t-2}K\lambda^{t-2}\mu^{k+n+1}\tau_{k+n+1}^{t-2}}\\&=\frac{K\lambda^{t-2}\mu^{n+1}\tau_{n+1}^{t-2}}{\dfrac{\lambda^2}{\mu}-1}\sum_{k=1}^N\frac{(\tau_{k+n}^{t-1})^2}{\dfrac{\mu}{\lambda^2}\tau_{k+n}^{t-2}\tau_{k+n+1}^{t-2}}\\&=K\lambda^t\mu^n\tau_n^t\end{aligned}$$

であるので，境界条件 (5) が満たされる。

また，τ_{n-1}^{t+1} を (6) および境界条件 (5) を用いて書き換えると，

$$\begin{aligned}\tau_{n-1}^{t+1}&=\frac{\tau_n^{t-1}}{\dfrac{\lambda^2}{\mu}-1}\sum_{k=1}^N\frac{(\tau_{k+n-1}^t)^2}{\tau_{k+n-1}^{t-1}\tau_{k+n}^{t-1}}\\&=\frac{(\tau_n^t)^2}{\left(\dfrac{\lambda^2}{\mu}-1\right)\tau_{n+1}^{t-1}}+\frac{\tau_n^{t-1}}{\dfrac{\lambda^2}{\mu}-1}\sum_{k=2}^N\frac{(\tau_{k+n-1}^t)^2}{\tau_{k+n-1}^{t-1}\tau_{k+n}^{t-1}}\\&=\frac{(\tau_n^t)^2}{\left(\dfrac{\lambda^2}{\mu}-1\right)\tau_{n+1}^{t-1}}-\frac{\tau_n^{t-1}}{\dfrac{\lambda^2}{\mu}-1}\times\frac{(\tau_{n+N}^t)^2}{\tau_{n+N}^{t-1}\tau_{n+N+1}^{t-1}}\\&\quad+\frac{\tau_n^{t-1}}{\tau_{n+1}^{t-1}}\times\frac{\tau_{n+1}^{t-1}}{\dfrac{\lambda^2}{\mu}-1}\sum_{k=1}^N\frac{(\tau_{k+n}^t)^2}{\tau_{k+n}^{t-1}\tau_{k+n+1}^{t-1}}\\&=\frac{(\tau_n^t)^2}{\left(\dfrac{\lambda^2}{\mu}-1\right)\tau_{n+1}^{t-1}}-\frac{1}{\dfrac{\lambda^2}{\mu}-1}\times\frac{(\tau_n^t)^2}{\dfrac{\mu}{\lambda^2}\tau_{n+1}^{t-1}}\\&\quad+\frac{\tau_n^{t-1}}{\tau_{n+1}^{t-1}}\times\tau_n^{t+1}\\&=-\frac{(\tau_n^t)^2}{\tau_{n+1}^{t-1}}+\frac{\tau_n^{t+1}\tau_n^{t-1}}{\tau_{n+1}^{t-1}}\end{aligned}$$

が得られるので，方程式 (4) の解であることも分かる。

そして，τ 関数が，(7) により，初期条件も含めて周期離散戸田方程式 (2), (3) の解を与えることも，実際に代入することによって確かめることができる。 □

この (6) に対する数値計算を $N=3$, 4, 5 で行うと，**Table 1** のような結果が得られる。なお，周期境界条件が課されているため，τ_0^t, τ_1^t, …, τ_{N-1}^t は添字のずれ程度の違いしかないので，$\tau_0{}^t$ のみ結果を示す。また，表記の簡略化のため，$\tau_n^0=a_n$, $\tau_n^1=b_n$ とし，得られる分数式の分母にのみ興味があるので，分母のみを書き出している。

この結果から，次の予想が得られる。

予想 1

τ 関数 (6) は，$(\lambda^2-\mu)$ のべき乗を除いて，ローラン性を持つ。

Table 1　Denominators of τ_0^t obtained from a numerical calculation.

	$N=3$	$N=4$	$N=5$
$t=0$	1	1	1
$t=1$	1	1	1
$t=2$	$K(\lambda^2-\mu)a_2$	$K(\lambda^2-\mu)a_2a_3$	$K(\lambda^2-\mu)a_2a_3a_4$
$t=3$	$K^2(\lambda^2-\mu)^3a_2^2b_2$	$K^2(\lambda^2-\mu)^3a_2^2a_3^2b_2b_3$	$K^2(\lambda^2-\mu)^3a_2^2a_3^2a_4^2b_2b_3b_4$
$t=4$	$K^4(\lambda^2-\mu)^6a_2^3b_1^2b_2^2$	$K^4(\lambda^2-\mu)^6a_2^3a_3^4b_1^2b_2^2b_3^2$	$K^4(\lambda^2-\mu)^6a_2^3a_3^4a_4^4b_1^2b_2^2b_3^2b_4^2$
$t=5$	$K^6(\lambda^2-\mu)^{10}a_2^6b_1^4b_2^3$	$K^6(\lambda^2-\mu)^{10}a_2^6a_3^6b_1^4b_2^3b_3^4$	結果無し（メモリー不足）

3．結論

もちろん，予想1が正しいことを示していくのが当面の課題である。

そして，予想1が正しいことを示した後，周期離散戸田方程式についての有限体上での研究へと研究を進めて行くとともに，この他の周期境界条件を課した離散方程式についても同様の手法を用いて，有限体上での考察が出来ないかを考えていく。

さらには，この研究を通して，離散系における可積分系とは何かを明らかにして行ければと考えている。

謝辞

本研究の一部は，平成23年度から平成25年度まで日本学術振興会学術研究助成基金助成金(若手研究(B)，課題番号：23740126）の助成を受けて遂行いたしました。

参考文献

1）S. Fomin, A. Zelevinsky, The Laurent phenomenon, *Adv. Appl. Math.* **28**, (2002) pp.119-144.

2）M. Kanki, J. Mada, T. Tokihiro, Singularities of the discrete KdV equation and the Laurent property, *J. Phys. A：Math. Theor*. **47**, (2014) 065201

3）M. Kanki, J. Mada, T. Mase, T. Tokihiro, Irreducibility and co-primeness as an integrability criterion for discrete equations, *preprint*, arXiv：1405. 2229.

4）T. Mase, The Laurent phenomenon and discrete integrable systems, *RIMS Kokyuroku Bessatsu* **B 41**, (2013) pp.43-64.

5）R. Hirota, Discrete Analogue of a Generalized Toda Equation, *JPSJ* **50**, (1981) pp.3785-3791.

（H 26．8．4 受理）