キャンバ角を有する三輪車両の運動方程式構築に関する研究 _{日大生産工}(院) 〇越 祐人 日大生産工 景山一郎

1 まえがき

近年,安定性や運動性能の観点から主にオートバイ の分野で旋回内側にロール角を持つ前二輪,後一輪の 三輪車両が注目されている.

このような車両は制動性能に関して、直進走行から の制動におけるタイヤ摩擦係数に着目した研究⁽⁴⁾や片 輪がスリップ時に着目した研究⁽⁵⁾がされている.しか し、こういった三輪キャンバ車両の研究は二輪車に比 べ数が少なく、基礎的な運動特性も含め検討していく 必要がある.

そこで我々はこれまで三輪キャンバ車両の基礎特性 として定常円旋回中の力の釣り合いに着目し,荷重変 化や横力変化を左右輪で配分することで定常状態の釣 り合いに幅があることを確認してきた.本研究ではよ り詳細に三輪キャンバ車両の運動特性を把握するため, 車体の横運動,ロール運動,ヨー運動および操舵系Z軸 まわりの運動の計4自由度の運動方程式を構築した. また,前二輪を繋ぐリンク機構のモーメントの釣り合 いから,三輪車両は左右輪でタイヤ力を変化させるこ とができると確認できたため報告する。

2 運動方程式

2.1 モデル概要

本研究では、モデルの複雑化を防ぐため以下の仮定 を基に運動方程式を誘導する.モデルの概要と各部の 位置を図1に示す.

 三輪キャンバ車両は車体系と操舵系(操舵系上部, リンク機構, 左輪部, 右輪部)の計4質点とする.

2) リンク機構はピン結合されているとする.

3) 車体の前後方向速度は一定とする.

サスペンションは考慮せず、車体はピッチングおよび上下運動しないものとする.

5) ロール角および舵角は微小とし, cos微小角=1, sin 微小角=微小角, 微小角の二乗は0として扱う.

6) キャンバスラストはタイヤキャンバ角と荷重に比例して発生する力とする.

7) コーナリングフォースはタイヤ横すべり角と荷重 に比例して発生する力とする.

8) キャンバスラストとコーナリングフォースは線形 結合して取り扱う. 2.2 座標系と方向ベクトル

本研究で扱う三輪車両は二輪車同様旋回内側にロー ル角を持つため, SAE座標系を用いる. 図2に各点での 座標系を表記する.

まず,慣性座標系の原点をOとする.動座標系の原点 を後輪接地点のA点とし,車体前方向に x_A 軸,車体横方 向に y_A 軸をとり x_A - y_A 平面は常に地面(x_0 - y_0 平面)と平 行とする.これに加え車体はロールするため車体重心 点Gの座標はA点座標とは異なり,ロール角を考慮し座 標変換する必要がある.操舵系重心点Sにおいてはロ ール角(ϕ),キャスター角(ξ),操舵角(δ)を考慮しそれぞ れ座標変換を必要とする.上記のように座標系を設定 することで x_A 軸まわりの回転が車体ロール運動, z_A 軸 まわりの回転が車体ヨー運動, z_S 軸まわりの運動が操 舵系ヨー運動となる.

上記座標系に準じて方向を表す単位ベクトルをe_■ と表記する.ここで添え字の■は各々の座標系を表す.



図1構成部材と位置ベクトル



図2 各部座標系

2.3 運動方程式の構築

運動方程式構築にあたり,まず各部重心点での加速 度を表記する.加速度は慣性座標系からの位置ベクト ルを二回微分することで求める.後輪接地点Aにおい ては位置に依存する力がないため,A点速度は次式で 示される.

$$v_A = v_{xA} e_{xA} + v_{yA} e_{yA}$$
 (1)
次に車体重心点Gの位置は図1より次式で示される.
 $r_{GO} = r_{AO} + r_{GA}$ (2)

The Study on the equation of motion of three-wheeled vehicle with camber angle

Yuto KOSHI and Ichiro KAGEYAMA

ここで r_{GA} は次式で示される. $r_{GA} = l_G e_x - h_G e_z$ (3) 上式の r_{GA} は車体重心系座標G - xyzで記述されてい るため後輪接地点座標 $A - x_A y_A z_A$ に座標変換し線形化 すると次式となる.

 $r_{GA} = l_G e_{xA} - h_G sin \phi e_{yA} - h_G cos \phi e_{zA}$ (4) よって慣性座標からみた車体重心点加速度は次式で示 される. なお, 微小角は線形化して扱う.

$$\begin{split} \ddot{\mathbf{r}}_{GO} &= \dot{\mathbf{v}}_{xA} + \ddot{\mathbf{r}}_{GA} \cong (\dot{v}_{xA} - v_{yA}\theta_z)\mathbf{e}_{xA} \\ &+ (\dot{v}_{yA} - v_{xA}\dot{\theta} + l_G\ddot{\theta} + h_G\ddot{\phi})\mathbf{e}_{yA} \\ & (5) \\ \\ \hline \begin{tabular}{l} & (5) \\ \hline \end{tabular} \\ & \ddot{\mathbf{r}}_{SO} = \dot{\mathbf{v}}_{xA} + \ddot{\mathbf{r}}_{CA} + \ddot{\mathbf{r}}_{SC} \cong (\dot{v}_{xA} - v_{yA}\dot{\theta}_z)\mathbf{e}_{xA} \\ &+ \{\dot{v}_{yA} - v_{xA}\dot{\theta} + (l_C + l_{GS}cos\xi - h_{GS}sin\xi)\ddot{\theta} \\ &+ (l_{GS}sin\xi + h_{GS}cos\xi)\ddot{\phi}\}\mathbf{e}_{yA} \end{split}$$

リンク機構部の加速度は次式となる.

 $\ddot{\mathbf{r}}_{HO} = \dot{\mathbf{v}}_{xA} + \ddot{\mathbf{r}}_{CA} + \ddot{\mathbf{r}}_{HC} \cong (\dot{v}_{xA} - v_{yA}\dot{\theta}_z)\mathbf{e}_{xA}$ $+ \{\dot{v}_{yA} - v_{xA}\dot{\theta} + (l_c + l_{GH}cos\xi - h_{GH}sin\xi)\ddot{\theta}$ $+ (l_{GH}sin\xi + h_{GH}cos\xi)\ddot{\phi}\}\mathbf{e}_{yA}$ (7)

左前輪部の加速度は次式となる.

右前輪の加速度は次式となる.

$$\begin{split} \ddot{\mathbf{r}}_{\text{LO}} &= \dot{\mathbf{v}}_{xA} + \ddot{\mathbf{r}}_{\text{CA}} + \ddot{\mathbf{r}}_{\text{MC}} + \ddot{\mathbf{r}}_{\text{LM}} \cong (\dot{v}_{xA} - v_{yA}\dot{\theta}_z) \mathbf{e}_{xA} \\ &+ \{\dot{v}_{yA} - v_{xA}\dot{\theta} + (l_c + l_L \cos\xi - h_L \sin\xi)\ddot{\theta} \\ &+ (l_L \sin\xi + h_L \cos\xi)\ddot{\phi}\} \mathbf{e}_{yA} \end{split}$$

 $\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_{\mathrm{RO}} &= \dot{\mathbf{v}}_{\mathrm{xA}} + \ddot{\mathbf{r}}_{\mathrm{CA}} + \ddot{\mathbf{r}}_{\mathrm{NC}} + \ddot{\mathbf{r}}_{\mathrm{RN}} \cong \left(\dot{v}_{xA} - v_{yA} \dot{\theta}_z \right) \mathbf{e}_{\mathrm{xA}} \\ &+ \left\{ \dot{v}_{yA} - v_{xA} \dot{\theta} + \left(l_C + l_R \cos\xi - h_R \sin\xi \right) \ddot{\theta} \right. \\ &+ \left(l_R \sin\xi + h_R \cos\xi \right) \ddot{\phi} \right\} \mathbf{e}_{\mathrm{yA}} \end{aligned}$ (9)

ここまでは各部材の加速度を記述してきた.これによ り各部材の慣性力を記述することができ,慣性力が各 部材に働いている力とモーメントと等しくなる.図3に 車体系に働く力とモーメントを示す.



図3より車体系重心点には重力,後輪接地部の力とモー メント,操舵系の連結点における力とモーメントが働 いている.よって車体系重心点の運動方程式は次式と なる.

$$m_{G}\ddot{\mathbf{r}}_{GO} = -F_{xA}\boldsymbol{e}_{xA} + F_{yA}\boldsymbol{e}_{yA} - N_{A}\boldsymbol{e}_{zA}$$
$$+f_{xB}\boldsymbol{e}_{xS} + f_{yB}\boldsymbol{e}_{yS} + f_{zB}\boldsymbol{e}_{zS} + m_{G}g\boldsymbol{e}_{zA}$$
$$(10)$$
$$I_{G}\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{ZO} = \boldsymbol{r}_{A} \times \boldsymbol{F}_{A} + \boldsymbol{r}_{B} \times \boldsymbol{F}_{B} + \boldsymbol{M}_{A} + \boldsymbol{M}_{B} + \boldsymbol{M}_{TfL}$$
$$(11)$$

上式の重力および後輪接地部の力とモーメントは $A = x_A y_A z_A 座標,$ 操舵系連結点の力とモーメントは $S = x_S y_S z_S 座標で記述しているため計算の際は座標変換を$ $必要とする.また<math>M_{TfL}$ は後輪のジャイロモーメントを 表している.

左前輪部に働く力とモーメントを図4に示す.







図5 リンク機構に働く力とモーメント

図5にリンク機構に働く力とモーメントを示す. 図5よりリンク機構の運動方程式次式で示される.

$$m_{H}\ddot{\mathbf{r}}_{H0} = f_{xl}\boldsymbol{e}_{xS} + f_{yl}\boldsymbol{e}_{yS} + f_{zl}\boldsymbol{e}_{zS}$$
$$+f_{xj}\boldsymbol{e}_{xS} + f_{yj}\boldsymbol{e}_{yS} + f_{zl}\boldsymbol{e}_{zS}$$
$$-f_{xH}\boldsymbol{e}_{xS} - f_{yH}\boldsymbol{e}_{yS} - f_{zH}\boldsymbol{e}_{zS} + m_{R}g\boldsymbol{e}_{zC0}$$
(16)
$$I_{H}\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{H0} = \boldsymbol{r}_{l} \times \boldsymbol{F}_{l} + \boldsymbol{r}_{j} \times \boldsymbol{F}_{j} + \boldsymbol{M}_{l} + \boldsymbol{M}_{j}$$
(17)



図6 操舵系上部の力とモーメント

図6に操舵系上部に働く力とモーメントを示す.図6より操舵系上部の運動方程式は次式となる.

$$m_{S}\ddot{\mathbf{r}}_{S0} = -f_{xB}\boldsymbol{e}_{xS} - f_{yB}\boldsymbol{e}_{yS} - f_{zB}\boldsymbol{e}_{zS} + f_{xH}\boldsymbol{e}_{xS} + f_{yH}\boldsymbol{e}_{yS} + f_{zH}\boldsymbol{e}_{zS} + m_{R}g\boldsymbol{e}_{zC0}$$
(18)
$$I_{S}\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{S0} = \boldsymbol{r}_{H} \times \boldsymbol{F}_{H} + \boldsymbol{r}_{B} \times \boldsymbol{F}_{B} + \boldsymbol{M}_{B} + \boldsymbol{M}_{H} (19)$$

ここまで各部材の運動方程式を記述してきたが,各部 材連結点での内力が運動方程式内に残ったままである. そこで各部材間で内力が釣り合うという条件から各内 力を求め式内から内力を削除する必要がある.

部材間での内力の釣り合い条件から各内力は次式と なる.

車体-操舵系連結点Bの内力:

$$f_{xB} = f_{xH} - m_S gsin\xi - m_S \ddot{r}_{xS0}$$

$$f_{yB} = f_{yH} + m_S g \phi_s - m_S \ddot{r}_{yS0}$$

$$f_{zB} = f_{zH} + m_S gcos\xi - m_S \ddot{r}_{zS0}$$
(20)

操舵系-リンク機構連結点Hの内力:

 $f_{xH} = f_{xI} + f_{xJ} - m_H gsin\xi - m_H \ddot{r}_{xH0}$ $f_{yH} = f_{xI} + f_{xJ} + m_H g\phi_s - m_H \ddot{r}_{yH0}$ $f_{zH} = f_{xI} + f_{xJ} + m_H gcos\xi - m_H \ddot{r}_{zH0}$ (21)

リンク機構・左前輪部の連結点Lの内力:

 $f_{xI} = -F_{xE}\cos\xi + F_{yE}\phi_{s}\sin\xi + N_{E}\sin\xi$ $-m_{L}gsin\xi - m_{L}\ddot{r}_{xL0}$ $f_{yI} = F_{yE} - N_{E}\phi_{s} + m_{L}g\phi_{s} - m_{L}\ddot{r}_{yL0}$ $f_{zI} = -F_{xE}sin\xi - F_{yE}\phi_{s}cos\xi - N_{E}cos\xi$ $+m_{L}gcos\xi - m_{L}\ddot{r}_{zL0}$ (22)

右前輪部に関しては左前輪部の添え字LをRに変えた 式になる.

上式をこれまで求めた運動方程式に代入し整理する と、本研究における三輪キャンバ車両の4自由度の運動 方程式は次式となる.また本研究で扱うモデルでは車 速一定でピッチにングおよび上下運動をしないため、 対応する加速度、角速度は0として扱う.なお座標が異 なる力については座標変換を行い微小角は線形化して 取り扱う.

車体系横方向運動:

$$m(\dot{v}_y + v_x \dot{\theta}_z + l_G \ddot{\theta}_z + h_G \ddot{\phi})$$

 $= F_{yA} + \{-(F_{xE} + F_{xF})cos\xi$
 $+ (F_{yE} + F_{yF})\phi_s sin\xi + (N_E$
 $+ N_F)sin\xi$
 $- (m_L + m_R + m_H$
 $+ m_s)gsin\xi\}(\phi sin\xi + \delta)$
 $+ \{(F_{yE} + F_{yF}) - (N_E + N_F)\phi_s$
 $+ (m_L + m_R + m_H + m_s)g\phi_s$
 $- m_l\ddot{r}_{yL0} - m_R\ddot{r}_{yR0} - m_H\ddot{r}_{yH0}$
 $- m_s\ddot{r}_{yS0}\} - \{-(F_{xE}$
 $+ F_{xF})sin\xi - (F_{yE}$
 $- F_{yF})\phi_s cos\xi - (N_E$
 $+ N_F)cos\xi + (m_L + m_R + m_H$
 $+ m_s)gcos\xi\}\phi cos\xi$

車体系ロール運動:

$$I_x \ddot{\phi} = -h_{Gs} \phi \{-(F_{xE} + F_{xF}) sin\xi - (F_{yE}) (23) - F_{yF}) \phi_s cos\xi - (N_E) + N_F) cos\xi + (m_L + m_R + m_H) + m_s) gcos\xi \} - h_{Gs} \{ (F_{yE} + F_{yF}) - (N_E + N_F) \phi_s + (m_L + m_R) + m_H + m_s) g\phi_s - m_l \ddot{r}_{yL0} - m_R \ddot{r}_{yR0} - m_H \ddot{r}_{yH0} - m_s \ddot{r}_{yS0} \} - h_G F_{yA} + M_{xB} cos\xi - M_{yB} \delta cos\xi + M_{zB} sin\xi + M_{xA} + M_{xTr}$$

車体系横運動:

$$I_{z}\ddot{\theta} = l_{s}\{(F_{yE} + F_{yF}) - (N_{E} + N_{F})\phi_{s} + (m_{L} + m_{R} + m_{H} + m_{s})g\phi_{s} - m_{l}\ddot{r}_{yL0} - m_{R}\ddot{r}_{yR0} - m_{H}\ddot{r}_{yH0} - m_{s}\ddot{r}_{yS0}\} + h_{G}\phi\{-(F_{xE} + F_{xF})\cos\xi + (F_{yE} + F_{yF})\phi_{s}\sin\xi + (N_{E} + N_{F})\sin\xi - (m_{L} + m_{R} + m_{H} + m_{s})gsin\xi\} - l_{G}F_{yA} - M_{xB}sin\xi + M_{yB}(\delta sin\xi + \phi) + M_{zB}cos\xi + M_{zA} + M_{zTr}$$

(25)

(24)

操舵系z軸まわりの運動:

$$I_{zs}\ddot{\theta_{zs}} = l_{Bs}\{(F_{yE} + F_{yF}) - (N_E + N_F)\phi_s + (m_L + m_R + m_H + m_s)g\phi_s - m_l\ddot{r}_{yL0} - m_R\ddot{r}_{yR0} - m_H\ddot{r}_{yH0} - m_s\ddot{r}_{yS0}\} + l_{Hs}\{(F_{yE} + F_{yF}) - (N_E + N_F)\phi_s + (m_L + m_R + m_H)g\phi_s - m_l\ddot{r}_{yL0} - m_R\ddot{r}_{yR0} - m_H\ddot{r}_{yH0}\} - (F_{yE} - F_{yF})l_{EL}cos\phi_s + (N_E - N_F)l_{EL}\phi_s + (\{(F_{yE} - F_{yF}) - (N_E - N_F)\phi_s + (m_L - m_R)g\phi_s - m_l\ddot{r}_{yL0} + m_R\ddot{r}_{yR0}\})l_{IL} + (M_{zE} + M_{zF})cos\xi + M_{zTE} + M_{zTF} - (I_{zL}\ddot{\theta}_{zL} + I_{zR}\ddot{\theta}_{zR})$$
(26)

3 リンク機構でのモーメントの釣り合い

ここでは三輪キャンバ車両の特徴である前左右輪を 繋ぐリンク機構に注目する.本研究ではタイヤの上下 運動は考慮していないが、タイヤの上下運動がない平 滑な路面を走行していると仮定するとリンク機構部は ピン結合されているためxs軸まわりのモーメントが常 に0になるといえる.つまり、リンク機構は車体の姿勢 角によらず常に地面と平行に運動することが分かる.

以上よりリンク機構のモーメントの釣り合いは次式 で示される.

$$0 = I_{zH}\theta_{zH}^{"} = b(F_{yE} - F_{yF}) - b\phi_s(N_E - N_F) - (F_{xE} - F_{xF})b\phi_s sin\xi - b\phi_s(m_Lg - m_Rg) + (m_Lg - m_rg)b\phi_s cos\xi$$
(27)

上式からリンク機構においてモーメントが釣り合うに は、左右輪のタイヤカ、左右輪部に働く重力、左右輪 の慣性項が釣り合う必要がある.ここで左右輪部は左 右対称であり質量が等しいとすると、左右輪の重力項 と慣性項で発生するモーメントはそれぞれ打ち消され、 左右輪のタイヤカのみで釣り合い状態を表現でき、次 式で示される.

$$0 = b(F_{yE} - F_{yF}) - b\phi_s(N_E - N_F) -(F_{xE} - F_{xF})b\phi_s sin\xi$$

ここでタイヤカ F_y はコーナリングフォースとキ (28) バスラストの足し合わせであり、キャンバスラストは キャンバ角 ϕ_s 、キャンバ係数 C_c と荷重N、コーナリン グフォースはタイヤ横すべり角 α 、コーナリング係数 C_s 、荷重Nにより次式で表される.

 $F_{\rm v} = C_c N \phi_s - C_s N \alpha \tag{29}$

つまり,走行中の三輪車両は左右輪で横力,荷重,前 後力同士が常に等しいというわけではない.仮に横力 に左右輪差が出た場合も荷重および前後力でそのモー メントを打ち消すことができる.つまり三輪キャンバ 車両は走行中に片輪で何か横力や荷重が変動すること が起きても,もう一方のタイヤでその変化を補う力と モーメントを発生することが可能であると示している. これはフロント一輪の二輪車では実現できない特性で あり三輪車両の特徴的な点だといえる.

また、今後アッカーマンなどの操舵機構を考慮する ことでよりリンク機構の釣り合い条件を広く変化させ ることができる可能性がある.アッカーマンステアを 組み込むことでタイヤ横力のみならず対地キャンバ角 ($\phi_s = \phi + \delta \sin \xi$)を変化させることができるためこれ により接地点の移動量が左右輪で変化する.制動力を 左右輪で変化させることでこのような三輪車両は二輪 車などで問題になる旋回中のフロントブレーキによる 車体の立ち上がり挙動を軽減させることができる可能 性がある.

4 まとめ

本研究ではキャンバ角を有する三輪車両の運動特性 を解明するための基礎として,車体系+操舵系(操舵系 上部,リンク機構,左前輪部,右前輪部)の4部材に分け, 横方向,ロール.ヨー,操舵軸まわりの4自由度の運 動方程式を構築した.

三輪独自の機構としてリンク機構に着目しモーメン トの釣り合いよりタイヤカに左右差が出た場合も、も う一方のタイヤで発生するタイヤカとのモーメントが 重要であり、モーメントが釣り合うようにタイヤの 各々の力を左右輪で配分することができる可能性を示 唆した.

今後は実車などによるモデルの妥当性の検討とモデ ルの拡張(前後方向運動や操舵機構,接地点の移動の考 慮)を行う必要がある.

「参考文献」

(1)景山克三 景山一郎:自動車力学,理工図書株式会社, p.114-131, (1984)

(2) 景山一郎:キャンバ角制御を用いたパーソナルモ ビリティの運動特性に関する研究,自動車技術会学術 講演会前刷集 No.115-12, (2012)

(3) 酒井秀男:タイヤ工学,株式会社グランプリ, p.403-412 (1987)

(4) 佐野貴透 寺田圭佑 渡辺賢一 高野和久 海江田
 隆:三輪車両の制動性能調査,秋季大会学術講演会講
 演予稿集,講演 No. 047,文献 No. 20166047, p. 241 246, (2016)

(5) Terada, K., Sano, T., Watanabe, K., Kaieda, T. et al.:"Investigation of the Behavior of Three-Wheel VehiclesWhen They Pass Over a Low μ Road Surface,"

SAE Int. J. Veh. Dyn., Stab., and NVH 1(1):30-37, 2017,doi:10.4271/2016-32-0051.