

再呼、再生産、性能低下と恐慌論

日大生産工(非常勤) ○篠原 正明
 情報システム研究所 篠原 健

1. はじめに

情報通信システムに代表されるサービス処理システム(略して、サービス系)において、系に加わる負荷トラヒックの増加にともない、それが処理能力(=容量)を超える付近から、サービス系の完了トラヒックが飽和気味に、さらには低下する現象(性能低下現象と言う)が観察される場合がある。呼損系においてはサービスの完了に失敗したトラヒックは、再度、サービスを受けるため、サービス系に加わる。電話サービスの分野ではこれを再呼と言う。性能低下特性を持つサービス系に再呼が加わると、条件を整えば、急激な特性の悪化が発生する(例えば、[1])。

一方、生産・経済学の立場からは、古くはルネサンス期のルカ・パチョーリの複式簿記(1494)、ケネーの経済表(1759)、アダム・スミスの国富論(1776)、マルクスの再生産表式(1863)、さらにはレオンチェフの産業連関表(1936)と、生産活動を再帰的な関係に注目して分析する。すなわち、ある時点の生産量は前時点の生産量の関数となる。例えば、複式簿記では、「 t 時点の貸借対照表 = $t-1$ 時点の貸借対照表 + $(t-1, t)$ 期間の損益計算書」、ケネーの経済表、マルクスの再生産表式はレオンチェフの投入産出関係式「 $X(t+1)=AX(t)+F(t)$ 」に集約できるが、いずれも、再帰的な関係式が成立する(付録1)。

本論文では、「再呼を伴うサービス系」と「再生産システム」の両者に共通する再帰的な関係に注目する。すなわち、生産・経済システムは、生産財を入力として消費財を出力とするサービス系と解釈する。さらに、「再呼を伴うサービス系」における混雑輻輳現象と同じメカニズムで経済システムで生じる「恐慌、金融バブル」を解釈する。第2章は単変数非線形モデル、第3章は多変数線形モデル、第4章は多変数非線形モデルについて考察し、第5章では恐慌論を展開する。

2. 再呼モデルと再生産システム

文献[1]の記号を用いて、スカラー変数・離散時間・再呼モデルの方程式を以下に整理する。各変数間の関係を図2.1に示す。

$$A(t) = \lambda(t) + R(t) \quad (2.1) \quad B(t) = g(A(t)) \quad (2.2)$$

$$C(t) = f(A(t)) \quad (2.3) \quad R(t) = \beta B(t-1) \quad (2.4)$$

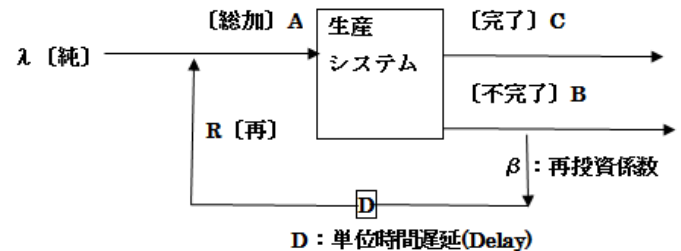


図2.1: 再生産システムとしての再呼モデル

$\lambda(t)$: t 期の純投資額 (純需要トラヒック)

$A(t)$: t 期の総投資額 (加わる総トラヒック)

$R(t)$: t 期の再投資額 (再呼トラヒック)

$B(t)$: t 期の生産CF (サービス不完了トラヒック)

$C(t)$: t 期の消費CF (サービス完了トラヒック)

[注2.1] CFはキャッシュフローの略

[注2.2] (2.1)~(2.4)に登場する変数 λ , β , A , B , C , R はすべてスカラーであり、従って、 $f(A)$, $g(A)$ は共に単変数関数である。再呼モデルにおいては、 $C=f(A)$ は加わるトラヒック A の関数としての完了トラヒック C (C : Carried or complete)を、 $B=g(A)$ は加わるトラヒック A の関数としての不完了トラヒック B (B : Blocked)を表す。定常性を仮定すれば、 $A=B+C=f(A)+g(A)$ (2.5)が成立する。

[注2.3] 生産システムを「サービス系」として見るならば、完了トラヒックは消費財CFに相当し、対象とする系の入力となる総投資(生産財)を活用して、いかにして系の消費を提供するかがサービスの中身となる。ここで、総投資(生産財)としたが、生産財以外にも入力となりうるので、総投資(非消費財)とすべき。例えば、対象とする系を国とするならば、「サービス」は国民に消費生活を提供することになる。

次に、(2.1)~(2.4)のシステムの定常性を仮定し、以下の非線形連立方程式(2.6)~(2.9)の動作点を考察する。

$$A = \lambda + R \quad (2.6) \quad B = g(A) \quad (2.7) \quad C = f(A) \quad (2.8) \quad R = \beta B \quad (2.9)$$

不完了関数 $B=g(A)$ に注目すると、(2.6)~(2.9)より(2.10)、すなわち、(2.11)を得る。

$$A = \lambda + \beta g(A) \quad (2.10) \quad Z = g(A) = (A - \lambda) / \beta \quad (2.11)$$

一方、完了関数 $C=f(A)$ に注目し、(2.5)に留意すると、(2.12)、すなわち(2.13)を得る。

$$A = \lambda + \beta g(A) = \lambda + \beta (A - f(A)) \quad (2.12)$$

$$y=f(A)=((\beta-1)/\beta)A+\lambda/\beta \quad (2.13)$$

これは[1]の(5)と同じである。(2.11)は(再呼モデルでは不完了関数であるが)CF再投資モデルでは投資対収益関数 $z=B=g(A)$ と再投資直線 $z=(A-\lambda)/\beta$ の交点、(2.12)は完了関数 $y=f(A)$ と再呼直線(2.13)の交点として、両システムの動作点が図解釈できる。

サービス系における完了トラヒックが経済システムでは国民などサービス受益者により消費される消費CFに(これがサービス系の「出力」である)、不完了トラヒックが経済システムでは生産CFを含む非消費CFの再投資CFに対応する。この再投資CF分は純投資CFと合体して、定常的な意味でサービス系の「入力」となる。サービス系においては、通常は窓口数(サーバ数)、さらには待ち室数などが明示的に与えられて、完了トラヒック、呼損率、待ち率、待ち時間、待ち数などのトラヒック諸量を評価するのが、待ち行列トラヒック理論の課題である。一方、家庭、企業、国、地域、地球など対象とするシステムにも依存するが、人間が経済活動を行う社会システムにおいて、貨幣(すなわちCF CashFlow)が消費者/生産者/金融機関などから構成されるネットワーク(一種の待ち行列網)を循環する様を分析・評価するのが経済学である。

次に再呼モデルの視点より最単純な非線形定倍再生産モデルでの価値分析を考察する。生産物を1単位生産するには、生産物を a 単位、労働価値を b 単位必要としよう。生産物1単位の価値を x とすると、価値更新式(2.14)が成立する。 $x(t+1)=ax(t)+b$ (2.14)。 κ 定倍再生産過程の定常状態を想定すると、価値均衡式(2.15)となる。 $\kappa x=ax+b$ (2.15) ここで κ 定倍再生産過程の定常状態では $x(t+1)=\kappa x(t)=\kappa x$ (2.16)が成立する。 $\kappa=1, \kappa>1, \kappa<1$ (2.17)が単純、拡大、縮小再生産過程に対応する。次に、 a を x の関数 $a(x)$; $a(x)$ は価値 x の生産物1単位生産に要する生産物の単位数で、価値均衡式は $\kappa x=a(x)x+b$ (2.18)、変形すると、 $a(x)=\kappa-b/x$ (2.19)を得る。すなわち、 $y=a(x)$ (2.20)と $y=\kappa-b/x$ (2.21)の交点として動作点が決まる。習熟効果を考えると $y=a(x)$ は、 x の減少関数、逆習熟効果では増加関数となる。例えば、図2.1中「T」では習熟効果を考慮しないので、水平線の一定値 $y=a(x)=a_0$ (2.22)、「U」では習熟効果を考慮して $y=a_1(x)$ を減少関数、「V,W」では逆習熟効果を考慮して $y=a_2(x), a_3(x)$ を増加関数とした。図的解釈からわかるように、習熟効果を考慮すれば均衡動作点での生産物1個の価値 x は減少傾向だが、動作点は存在する(x 切片 b 以上)。一方、逆習熟効果の下では、Vのように交

点が存在しない場合(無限遠点に存在し、発散と解釈)、Wのように α, β と2個存在する場合(α は安定点、 β は不安定点、さらに無限遠点にもう1つ存在(発散))が考えられる。なお、図2.1中「T,U,V,W」において再生産係数関数 $y=a(x)$ は単純化のためすべて直線表示した。図2.2の階段状逆習熟曲線では「W」と同様な傾向で、2つの安定な動作点 α, γ 、1つの不安定動作点 β を持つ。 α は生産物価値が適正に保たれた状態、 γ は非習熟性あるいは非効率的生産性により生産物価値が肥大化した状態である。

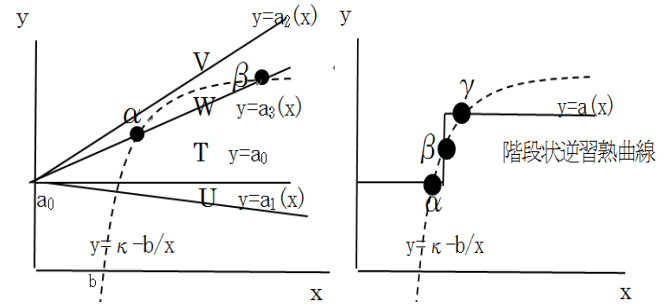


図2.1 非線形再生産モデル 図2.2 階段状逆習熟曲線

3. 線形多元再呼モデルと産業連関モデル

(2.1)~(2.4)のスカラー変数 λ, A, B, C, R を多元列ベクトル($n \times 1$)とし、(2.2),(2.3)の非線形関数を線形とする。

$$A(t)=\lambda(t)+R(t) \quad (3.1)$$

$$B(t)=GA(t) \quad (3.2)$$

$$C(t)=FA(t) \quad (3.3)$$

$$R(t)=\beta B(t-1) \quad (3.4)$$

ここで、 G, F は $(n \times n)$ 正方行列、 β は再投資係数でスカラー値である。定常状態を仮定し、(3.1)、(3.2)、(3.4)より、

$$A=\lambda+\beta GA \quad (3.5) \quad \text{すなわち、} \quad A=(I-\beta G)^{-1}\lambda \quad (3.6)$$

(3.6)は産業連関モデルにおける総生産ベクトル y の表現式とも一致する。投入係数行列を P 、最終需要を f とすると、

$$Py+f=y \quad \dots \dots \quad y=(I-P)^{-1}f \quad (3.7)$$

(3.6)と(3.7)を対比すると、 βG が投入係数行列 P に、純需要、純投資ベクトルが最終需要ベクトル f に対応する。ところで、(3.4)の R は再生産ベクトルとも呼ぶべきで、 $R=\beta B$ と、 R が生産額 B に直結することにより、 A による A の再帰表現式(3.5)が成立する。又、再投資係数 β はスカラー値としたが、(3.8)の $n \times n$ 対角行列、(3.9)の一般の $n \times n$ 正方行列と一般化する。

$$\beta=\text{diag}\{\beta_i\} \quad (3.8)$$

$$\beta=\{\beta_{ij}\} \quad (3.9)$$

(3.8)の対角行列では β_i は部門別再投資係数を、(3.9)の一般の行列では βG を新たな投入行列と考える。

4. 非線形多元再呼モデル

多元再呼モデルにおいては、以下の漸化式(4.1)~(4.4)が成立する。

$$A(t)=\lambda(t)+R(t) \quad (4.1)$$

$$B(t)=g(A(t)) \quad (4.2)$$

$$C(t)=f(A(t)) \quad (4.3)$$

$$R(t)=\beta B(t-1) \quad (4.4)$$

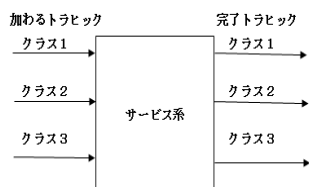


図4.1 多元トラヒックのサービス系

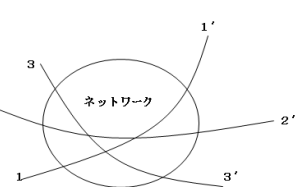


図4.2 ネットワークに加わる複数エンド-エンド間トラヒック

まず、再投入係数 β はスカラー値としよう。実際のドル、円などの貨幣が循環するCF網は消失、発生を伴う待ち行列網にマクロ的にモデル化しようが、その具体的イメージを得るために、呼損系の簡単な例で説明を試みる。図4.1、図4.2に示す具体的な多元サービス系を想定し、多元完了トラヒック特性 $C=f(A)$ (4.5)、多元不完了トラヒック特性 $B=g(A)$ (4.6)がどのような特性を持つかを評価する。窓口数 $N=1$ で、呼損特性がアーランB式に従うとすると、呼損率 $b=a/(1+a)$ (4.7)で評価できる。従って、加わるトラヒック(呼量)を a (アーラン)とすると、完了トラヒック(呼量) c (アーラン)は、(4.8)となる。

$$c=a(1-b)=a/(1+a) \quad (4.8)$$

そこで、3種のトラヒック(呼量 a_1, a_2, a_3)がランダムに混合して単一窓口に加わるとすると、加わる呼量 $a=a_1+a_2+a_3$ として、呼損率 b はアーランB式(4.8)により、 $b=(a_1+a_2+a_3)/(1+a_1+a_2+a_3)$ (4.9)となる。従って、多元不完了トラヒック特性は(4.10)で、 $B=(B_1, B_2, B_3)^T=(a_1/(1+a_1+a_2+a_3), a_2/(1+a_1+a_2+a_3), a_3/(1+a_1+a_2+a_3))^T$ (4.10)多元完了トラヒック特性は(4.11)で与えられる。

$$C=(c_1, c_2, c_3)^T=(a_1/(1+a_1+a_2+a_3), a_2/(1+a_1+a_2+a_3), a_3/(1+a_1+a_2+a_3))^T \quad (4.11)$$

以上より推察できるが、一部のトラヒック(図4.1では例えばクラス1、図4.2では例えば1-1'間)が増加するだけでも、他のトラヒックがこうむる呼損は増加してしまう。例えば、(4.11)において、 a_1 が増加すると c_1 は増えるが、 c_2, c_3 は減少してしまう。このように、多元再呼モデルでは各クラスのトラヒックが相互に影響を及ぼし合う。相互に影響を及ぼし合わない極端な例として、個々のクラス毎に完全に分離した場合が考えられる。産業連関表で言えば、投入係数行列 $P=\beta G$ が対角行列となる場合に相当する。ここで輻輳と恐慌の発生原因について一言……軽く適度なトラヒック相互融通は輻輳抑制に効果的だが、過度な相互融通は輻輳の原因となる。同様に、軽く適度な部門間融通は恐慌抑制に効果的だが、過度な部門間融通は恐慌の原因となりうる、と言える。さて、(4.1)~(4.4)の連立方程式を整理すると、(4.12)あるいは(4.13)を得る。

$$Z=g(A)=\beta^{-1}(A-\lambda) \quad (4.12) \quad Y=f(A)=(1-\beta^{-1})A+\beta^{-1}\lambda \quad (4.13)$$

(4.12)は(2.11)、(4.13)は(2.13)に対応しているが、これらの2つの方程式(4.12)、(4.13)は多変数連立方程式で、動作点の特徴付けとして、2章における「不完了関数 $z=g(A)$ と再投資直線の交点」ならびに、「完了関数 $y=f(A)$ と再呼直線の交点」としての解釈はそのまま多次元でも成立する。さらに、対角行列 $\beta=\text{diag}\{\beta_i\}$ (4.14)、正方行列 $\beta=\{\beta_{ij}\}$ (4.15)と一般化する。

5. 恐慌、バブルの不安定現象

再呼モデルならびにCFの再投資モデルにおいて、トラヒックならびにCFの定常流を想定することにより、トラヒック量あるいはCF量の適切な時空間での平均値を採用して、その代表値の関係を数式表現し、方程式系を構成する。どのような平均を採用するかは、分析者の視点に依存する。例えば、力学について言えば、…ミクロな世界では量子力学、マクロな世界では相対論、我々人間の目線ではニュートン力学、…となる。

以上に述べたごとく、再呼現象あるいはCFの経済現象においても、相対的に定常的と考えられる部分に注目することにより、注目する現象を分析することができる。その意味で、本稿のCFの再投資モデルはマクロ経済学モデルと同じ視点の平均レベルである。一方、M/M/Sなどの待ち行列・トラヒック理論では、客の到着分布、サービス時間分布等より微細な(ミクロ)部分に注目しており、本稿の再呼モデルはより巨視(マクロ)的な平均レベルに位置づけられる。以上の点に留意して、以下に分析する「経済恐慌」、「金融バブル」等での時間スケール感覚を考慮する必要がある。

〔恐慌のメカニズム〕

再呼を伴うサービス系では完了特性が性能低下特性を持つと、不完了がさらなる不完了を誘発し、「急激な雪だれ現象」が発生し、系のマクロな状態が転移する。その後、入力トラヒックを減少しても、確率的変動は存在するも、「輻輳状態」は維持される。十分に入力を減少することにより、「輻輳状態」は解消されるという「ヒステリシス(履歴現象)」が観察される。現実のシステムでは、確率的変動が大きいとマクロな状態は観察されにくい。しかし、「平均レベル」の設定次第では、その背景に確実に存在していると考えられる。それでは、再投資を伴うCFシステムにおいて、恐慌現象が発生するためには投資対収益関数(不完了関数 $B=g(A)$)がどのような形状を持つべきかを考察する。恐慌現象の必要条件である完了関数 $C=f(A)$ の性能低下特性は、S字型の曲線を示す傾向を持つ不完了関数 $B=g(A)$ では、S字型曲線がよりくびれるほど再呼直線と完了関数、あるいは、再投資直線と生産

関数の交点として、不安定な動作点、さらには、表裏一体の関係にある「複数の動作点」、「ヒステリシス」、「不連続な相転移」、等の一連の不安定現象が出現しやすくなる。完了関数 $C=f(A)$ の過度な性能低下は、経済学的視点からは、生産関数の過度なくびれに相当し、生産財(入力)の増加に伴う消費財(出力)関数の減少特性を意味する。すなわち、好景気時における過度な消費の落ち込みが一連の不安定現象の引き金になる。情報通信等のサービス系では加わる負荷が増加しても、適切な過負荷制御が行われれば、受け付ける負荷を容量付近に保つことにより、サービス系のスループット(出力)を、容量以上には増加できぬが、保持することが可能である。それでは、どの程度の消費落ち込みが不安定現象に直結するのかを以下に定性的に考察する。定量的には不安定な動作点の存在に帰着できるが、定性的に消費の落ち込みがどのように不安定現象を生起するかの消費財の需要・供給にもとづく一考察の試案を以下に述べる。

価格 P と需要量 Q の関係を図示した典型的な需要曲線 $P=h(Q)$ (5.1) を図 5.1 に示す。一般に価格 P が上がれば需要量は減少するので、右下がりの曲線となる。価格 P の量 Q の総価値 PQ 積を Z で定義する。

$$Z=PQ=Qh(Q) \quad (5.2)$$

注目する財の総価値 Z はその価格 P によらず、一定値 Z_0 をとると仮定しよう (PQ 積一定の仮定)。

$$Z=PQ=Z_0 \quad (5.3)$$

価格あるいは需要量の大小にかかわらず、社会全体に流通するその種の財の総価値は一定であると考え。 PQ 積一定の下での需要曲線例を図 5.1 に実線で示す。さらに、横軸に量 Q をとり、縦軸に総出力価値(すなわち、総価値 PQ 積= Z) をとり、その形状を図 5.2 に示す。

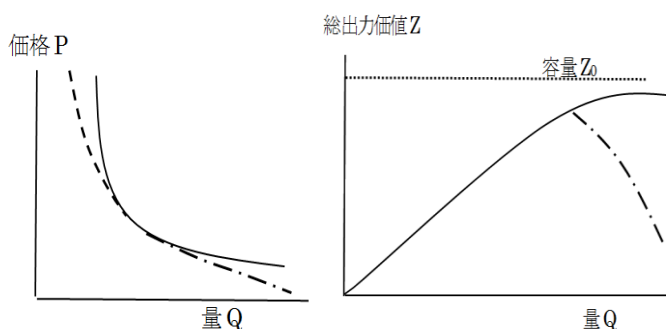


図 5.1 需要曲線 $P=h(Q)$ 図 5.2 総出力価値曲線 $Z=PQ$

実際は、量 $Q \rightarrow 0$ でも価格 P は有限と考えれば、需要曲線は図 5.1 の破線の特徴を持つと考えられる。 PQ 積一定の場合は、図 5.1 の需要曲線では双曲線(実線)で、図 5.2 で $Z=Z_0$ の水平線(点線)で表現できる。但しこの PQ 積= Z_0 で一定値(点線)では、 Q 小で非現実的 P 大を想定した結果であり、実感としてのスループット、完了特性は図 5.2 の実線の様に総出力価値が Z_0 で飽和す

る傾向と考えられる。さらに、恐慌の必要条件である性能低下の例を図 5.2 で一点鎖線で示したが、これは図 5.1 では、 PQ 積一定の曲線を下回る需要曲線を意味する。すなわち、 Q の増大と共に P が低下するのは消費者物価の視点からは好ましいが、恐慌が発生しないためには PQ 積をある程度保つなどして、 Q の増加に伴う過度の P の低下を抑制することが肝要である、等と言われている。しかしながら、シュンペーターの創造的破壊の視点からすれば、技術革新により同じ機能を社会的に果たしながらも (PQ 積一定に対応)、価格がさらに低下する突然変異的進化を必ずしも否定的には捉えない。この過度な非線形くびれによる内発的、内生的な均衡点の不連続的遷移こそが、資本主義における経済発展の源泉となる技術革新・創造的破壊と説いた。

6. おわりに

待ち行列システムの目的がサービス完了であるように、経済システムの目的が人々の生活を営むための消費である点に注目し、サービス系(再呼モデル)と経済システム(再生産表式、産業連関、複式簿記)を対応させることにより、個々のシステム間の類似性(同型性)を指摘し、それにより、経済恐慌、金融バブルのメカニズムを考察した。

付録1 産業連関と複式簿記とパス代数

文献[2]の(2)より、 $x(t+1)=x(t)+K(t)1$ (A1.1)

ここで、 $x(t)$ は t 時点対応ストック変数ベクトル、 T は取引行列 $K=T-T^t$ (A1.2) は複式簿記(歪対称)行列で、右辺の上付き文字 t は転置を表す。基本的な産業連関モデルでは、投入係数行列を A 、生産高ベクトルを X 、最終需要ベクトルを F とすると、(A1.3) が成立する。

$$X(t+1)=AX(t)+F \quad (A1.3)$$

(A1.3) を (A1.1) と対比して、(A1.4) と変形する。

$$X(t+1)=X(t)+(A-D)X(t)+F \quad (A1.4)$$

(A1.1) と (A1.4) を比較すると、(A1.5) を得る。

$$K(t)1=(A-D)X(t)+F \quad (A1.5)$$

「1 ステップ産出 $AX-0$ ステップ産出 X 」は「純粋に1 ステップ産出」であるが、それに最終需要 F を加えた値が、損益計算値 $K(t)1$ と対応する。さらに、(2.18)の均衡式 $x=a(x)x+b$ はパス代数の均衡式 $x=A \otimes x \oplus b$ 、 $X=A \otimes X \oplus B$ と同じ再帰構造と繋がる。

参考文献

- [1] 篠原正明：再呼現象の解析とその制御、信学論 J, 67-B, 5, pp.537-544 (1984)
- [2] 篠原正明、篠原健：複式簿記理論の位相幾何学的考察(その9)、日本大学生産 I 第44 回学術講演会、7-39, pp.1107-1110 (2011-12-3)