ISSN 2186-5647

2-23

有理関数の Kernel による SPH 法シミュレーション

日大生産工(院)　○日下部智亮　　日大生産工　角田和彦

1　はじめに

粒子法は流体の数値解析を行う上で用いる手法である.流体は小さな粒子の集合から構成されていると考え,粒子の挙動を解析することで流体全体の挙動を近似する.格子の分割を基にした,メッシュ法では解けないような大変形を伴う問題で扱われる.特に水流は,水の分離や合流を表現する必要がある. 粒子法ならばそれぞれ独立した粒子によって水流を表現できる. しかし, 流体は無数の粒子から構成されているため計算量が膨大である. 粒子数を増やすほど解析の精度は向上するが,代わりに各粒子の圧力や速度を計算しなければならない. そのために, 解析時間が計算機の性能に大きく関わっている. この問題は近年のコンピュータ演算技術の向上により改善された. 計算時間が短縮されて実用的になったため, 粒子法による計算に適した対象の数値解析が行われるようになっている.

代表的な粒子法にはMPS(Moving Particle Semi-implicit) 法と SPH(Smoothed Particle Hydrodynamics)法[1)]があり,本研究ではSPH法を用いる.

SPH法は各々の粒子に変数を与え,Kernelという重み関数を使用し積分を行うことで流体の動きを近似的に解く,粒子法の離散化手法である.このKernel関数の種類によって各粒子にかかる重みが異なるため流体の挙動は変わってくる.また,Kernel関数は演算が容易かつ流体の動きが安定したものが望まれる.

有理型重み関数は,神経回路網ニューロンをモデルとしたニューラルネットワークの入出力関係から提案された特性関数である[2)].

本研究では有理型重み関数をSPH法に適用させた有理型Kernel関数を使用した数値解析を行う.数値解析の精度を実験値と比較し流体への影響を検討する.圧力への影響を解析するために静水圧モデルとダム崩壊流れモデルを用意した.また,ダム崩壊流モデルでは水流の挙動も解析を行う.

2　SPH法

Kernel関数$W(r-r',h)$により平均化する操作を行う.評価点 r において任意の物理量を$f(r)$とする.

$$f(r) \cong \int f(r')W(r-r',h)dr' \tag{1}$$

式(1)において,$r-r'$は粒子間距離を表す.Kernel関数Wは物理量の分布を意味する.

$$f(r) = \sum_j m_j \frac{f_j}{\rho_j} W(r_j - r, h) \tag{2}$$

式(2)に離散化式を示す.ただし,m_jは粒子jにおける質量である.SPH法では評価点rに対する近傍粒子r_jとの距離に応じて平均化を施す.そのときの物理量の総和が評価点rにおける物理量となる.

次に流体の支配方程式を示す.式(3)はナビエストークス方程式を表す.

$$\frac{\mathrm{Du}}{\mathrm{Dt}} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2 \mathrm{u} + g \tag{3}$$

uは流体速度,νは動粘性係数,ρは密度,pは圧力,gは重力である.

3　Kernel関数

SPH法はKernel積分による平均化の影響を受ける範囲を定め,範囲外の粒子は無視する必要がある.そのために範囲外ではKernel関数をゼロとする.この操作をコンパクト化という.また,どの程度平均化するかはhの値によって決まる.平均化する際のKernel関数はどのような形でもいいわけではない.次式(4)のように規格化されている必要がある.

$$\int \mathrm{W}\, dr = 1 \tag{4}$$

SPH-Method Simulations by Using Rational Kernel Function

Tomohiro KUSAKABE, Kazuhiko KAKUDA

Kernel関数が影響を及ぼす範囲の半径を$2h$とすし,コンパクト化を行う.図１に平均化の影響半径とKernel関数の分布を示す.

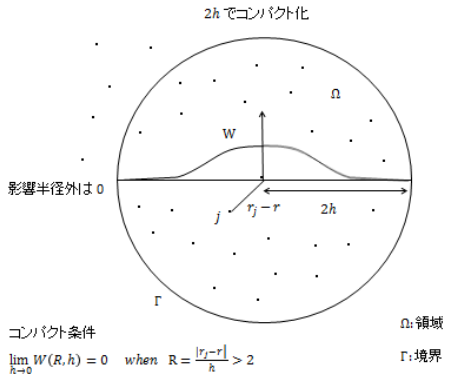


図１．影響半径と物理量の分布

４ ニューロンの特性関数

式(5), (6)に神経回路網ニューロンをモデルとしたニューラルネットの入出力関係から提案された特性関数を示す.

$$V_j = h(U_j) \tag{5}$$

$$U_j = \sum_{i=1}^{n} S_{ij} w_{ij} + I_j - T_j \tag{6}$$

S_{ij}はj番目の素子のn個入力であり, w_{ij}は入力にかかる重み, I_jはバイアス値, T_jは閾値を表す. V_jはj番目の素子からの出力であり, 特性関数hによって解く. また, ニューラルネットワークのモデル化は図2のようになる.

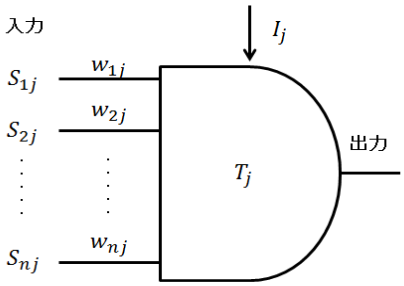


図2. ニューロンモデル

$$h(v) = \frac{1}{2}\left\{1 + \tanh\left(\frac{v}{2k}\right)\right\} \tag{7}$$

式(7)の特性関数hはシグモイド関数と呼ばれる連続した関数である.

シグモイド関数と流体の移流拡散系の特徴を有する関数[3]から次式(8)の特性関数が導かれる.

$$h(v) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{1+|\gamma|}\right) & \gamma \geq 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+|\gamma|}\right) & \gamma < 0 \end{cases} \tag{8}$$

さらに, 微分量は次式(9)で与えられる.

$$h'(v) = \frac{1}{4k}\frac{1}{(1+|\gamma|)^2} \tag{9}$$

４ 有理型Kernel 関数

今,ニューラルネットワークの入出力関係から導き出された特性関数の微分量を求めた.式(9)において,$v = r, k = \frac{h}{2\kappa}$とすると,

$$\mathrm{W}(r) = \frac{\kappa}{2h}\frac{1}{(1+\kappa R)^2} \tag{10}$$

となり,有理型のKernel関数となる.
次式(11)は式(10)にコンパクト化を施した,有理型Kernel関数である.また,式(12)は２次元におけるコンパクト化のための適当な定数である。

$$\mathrm{W}(R,h) = \frac{a_d \kappa}{2h}\left\{\frac{1}{(1+R^2)} - \frac{1}{(1+2\kappa)}\right\} \quad (0 \leq R \leq 2) \tag{11}$$

$$a_d = \frac{1}{2\pi h^2\left(\log 3 - \frac{8}{9}\right)} \tag{12}$$

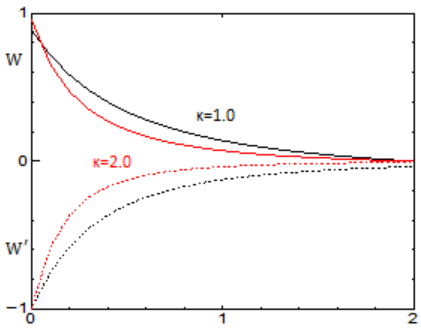


図3. κの値による分布

図3は有理型Kernel関数の特性値κの値を変化させた時の関数の分布である.Wに対してW′は微分した値である.

5 数値解析

5-1.静水圧モデル

有理型Kernel関数を用いたSPH法による静水圧の数値解析を可視化したものを示す．図4は静水圧モデルの粒子の初期配置である.点Aは静水圧の測定箇所であり,左の壁粒子から10個目の粒子である.

このモデルにおける静水圧の理論値は $P=\rho gh$ によって求められ,その値は4708.8[Pa]である.図5の(a)~(b)に特性値 κ =5.0のシミュレーションを示す.図6は静水圧の時間ごとの変化を表す.Gaussianは代表的なKernel関数のひとつである.有理型Kernel関数は特性値 κ =4.0,5.0,6.0を用意した.有理型Kernel関数はその特性値 κ を調整することで,より理論値に近い圧力分布を得ることがわかる.

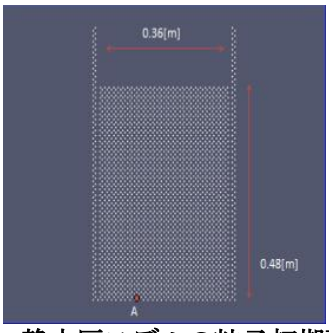
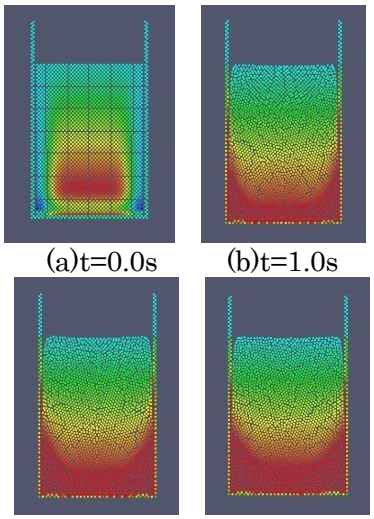


図4. 静水圧モデルの粒子初期配置



(a)t=0.0s (b)t=1.0s

(c)t=2.0s (d)t=3.0s

図5. 静水圧シミュレーション

Pressure_colorbar

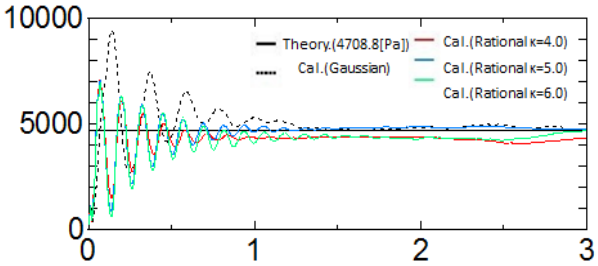


図6. 静水圧における圧力の変化

5-2.ダム崩壊流れモデル1

続いて,有理型Kernel関数によるダム崩壊流れ時の圧力変動を見る.図7に粒子のダム崩壊のモデル1における粒子の初期配置を示す.点Bは右の壁粒子において下から1cmの位置であり,点Bにかかる圧力の変化を計測した．図8の(a)~(d)に特性値 κ =10.0のシミュレーションを示す.図9はダム崩壊流れモデル1の時間ごとの変化を表し,実験値[4]と比較した.水流が壁に衝突する時間がやや遅いものの,Gaussianと似た軌跡を辿っている.

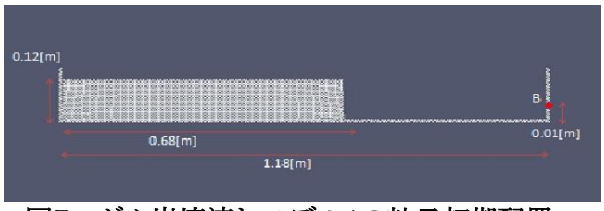
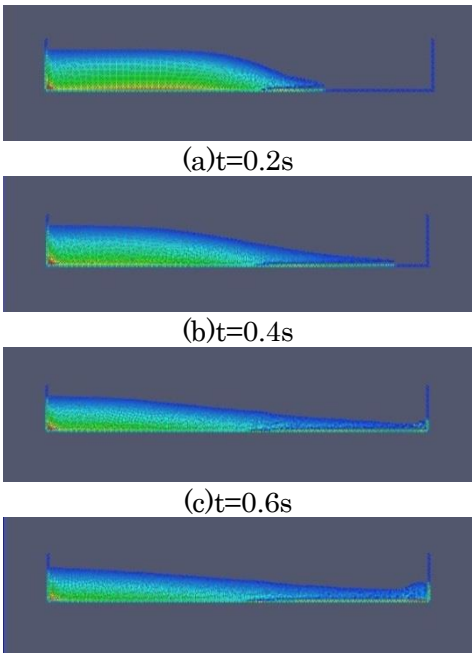


図7. ダム崩壊流れモデル1の粒子初期配置



(a)t=0.2s

(b)t=0.4s

(c)t=0.6s

(d)t=0.8s

図8. ダム崩壊流れシミュレーション1

Pressure_colorbar

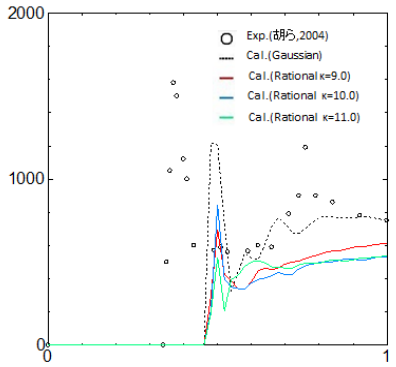


図9. ダム崩壊流れにおける圧力の変化

5-3.ダム崩壊流れモデル2

有理型Kernel関数によるダム崩壊流れ時の先端比較を示す.先端比較とは,水流の最先端の粒子を追って,水粒子の流れた距離と流れにかかる時間から割り出される比を基に水流の挙動を調べる方法である. 図10は粒子のダム崩壊のモデル2における粒子の初期配置である. 図11の(a)~(d)に特性値 κ =4.0のシミュレーションを示す.図12は図11を基に各時刻t(s)における最も右に位置する粒子の座標をプロットした.有理型Kernel関数を使用した場合のダム崩壊流れの挙動は特性値 κ によらず,Gaussianと同じであることが分かった.その流れの挙動は時間経過に伴い実験値[5]に近いものとなっている.

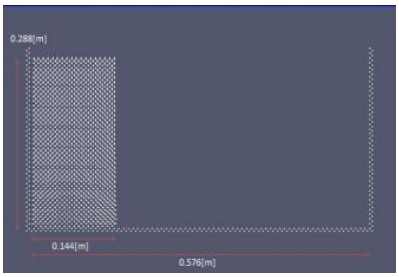
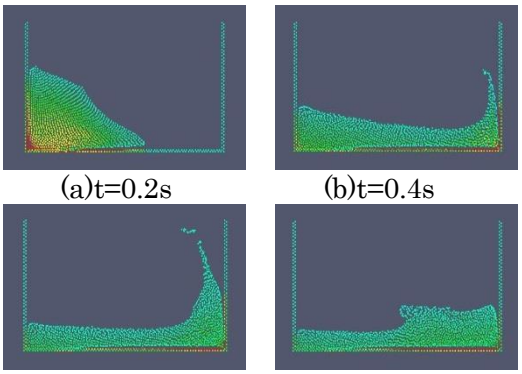


図10. ダム崩壊流れモデル2の粒子初期配置



(a)t=0.2s (b)t=0.4s

(c)t=0.6s (d)t=0.8s

図11. ダム崩壊流れシミュレーション2

Pressure_colorbar

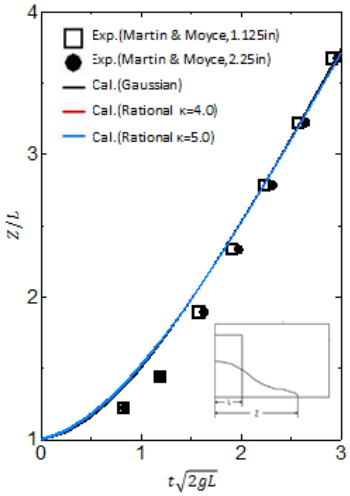


図12. 有理型Kernel関数と先端比較

6 おわりに

有理型Kernel関数により平均化を施し,圧力と流れの挙動, 2 つの観点からSPH法への適用性を検証した.今回は 2 次元解析であったが良好な結果が得られた.

代表的なKernel関数であるGaussianと比較すると,特性値 κ の変化によって圧力を調整できることがわかった.

今後は 3 次元解析に取り組み,数値解析の精度の向上を目指す.

参考文献

1) G.R.Liu,M.B.Liu, Smoothed Particle Hydrodynamics,World Scientific,2003
2) 角田和彦,「ニューラルネットの特性関数とその近似関数」,情報処理学会第 67 回全国大会,pp.1-239~1-240.
3) 角田和彦,「流体力学的アプローチのニューラルネットワークへの応用」,日本機械学会第 15 回計算力学講演会講演論文集,pp.529~530,2002
4) J.C.MARTIN,andW.J.MOYCE,"AN EXPERIMENTAL STUDY OF THE COLLAPSE OF LIQUID COLUMNS ON A RIGID HORIZONTAL OLANE", TheRoyalSociety,vol.244,no.882,pp.312~324,1952
5) 胡長洪,柏木正,CIP 法を用いた強非線形波・浮体相互作用の数値計算,九州大学応用力学研究所研究集会報告,2003